Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по информатике (профиль «Искусственный интеллект») для 8-10 классов

2026 учебный год

Максимальное количество баллов — 60

Задание № 1

Условие:

Известно, что объекты x_1, x_2, ..., x_{50} принадлежат одному из двух классов: каждый из них имеет метку 0 или 1. Среди объектов x_1, ..., x_{20} ровно 4 имеют метку 1, а среди объектов x_{21}, ..., x_{50} ровно 4 имеют метку 0.

Рассмотрим все пары (x_i, x_j), для которых x_i имеет метку 0, x_j имеет метку 1 и $i<j$.

Обозначим через T число таких пар.

Определим величину

$$ROC\ AUC = \frac{T}{N_0 \cdot N_1},$$

где N_0 — число объектов с меткой 0, а N_1 — число объектов с меткой 1.

Найдите минимально возможное значение $ROC\ AUC$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Ответ: 52/75

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 6 баллов

Условие:

Найдите максимально возможное значение $ROC\ AUC$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Ответ: 73/75

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 6 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение:

У первых 20 объектов есть 4 единицы и 16 нулей. У вторых 30 объектов есть 26 единиц и 4 нуля.

Всего:

$$N_0 = 16 + 4 = 20,$$

$$N_1 = 4 + 26 = 30.$$

Знаменатель:

$$N_0 \cdot N_1 = 20 \cdot 30 = 600.$$

Пары, где ноль находится в первой группе, а единица во второй группе, всегда подходят, потому что индекс нуля меньше индекса единицы. Таких пар $16 \cdot 26 = 416$. Осталось учесть пары внутри первой и внутри второй групп.

В первой группе таких пар максимум $16 \cdot 4 = 64$, если все нули стоят раньше всех единиц. Минимум равен 0, если все единицы стоят раньше всех нулей.

Во второй группе таких пар максимум $4 \cdot 26 = 104$, если все нули стоят раньше всех единиц. Минимум равен 0, если все единицы стоят раньше всех нулей.

Минимальное значение:

$$T_{\min} = 416,$$
$$ROC\ AUC_{\min} = \frac{416}{600} = \frac{52}{75}.$$

Максимальное значение:

$$T_{\max} = 416 + 64 + 104 = 584$$
$$ROC\ AUC_{\max} = \frac{584}{600} = \frac{73}{75}.$$

Задание № 2

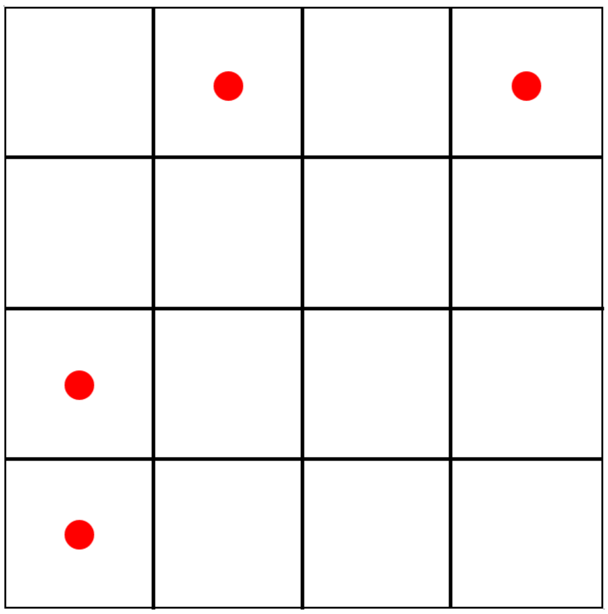
Условие:
Классификатор работает по шагам с доской 4×4. Изначально ни одна клетка не отнесена ни к какому классу.
На каждом шаге классификатор выбирает ломаную, состоящую из двух отрезков с общим концом. Концы обоих отрезков должны находиться в центрах клеток доски. В очередной класс попадают все ещё не отнесённые ни к одному классу клетки, центры которых лежат на выбранной ломаной.
Работа классификатора заканчивается, когда все клетки доски отнесены к некоторым классам. Известно, что классификатор действует так, чтобы число использованных классов было наименьшим возможным. Сколько классов получится?

Ответ: 3
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 6 баллов

Решение:
Одна ломаная состоит из двух отрезков. Каждый отрезок может проходить не более чем через 4 центра клеток, а общий конец у них один. Поэтому одна ломаная может покрыть не более $4 + 4 - 1 = 7$ клеток. Значит, двумя ломаными можно покрыть не более $7 + 7 = 14$ клеток, а на доске всего 16 клеток. Следовательно, нужно как минимум 3 класса.

Задание № 3

Условие:
Среди клеток доски отмечены 4 специальные клетки.



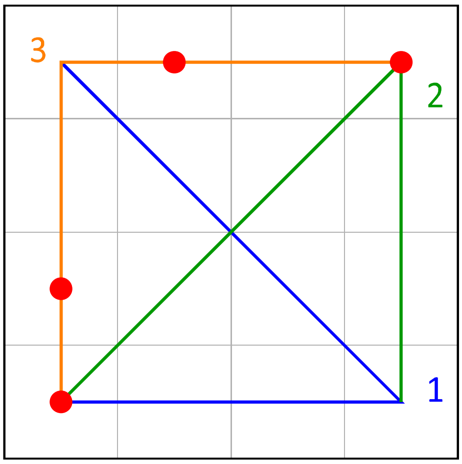
Пусть a_i — количество специальных клеток, попавших в i-й класс. Для найденного в предыдущем пункте числа классов определите наименьшее возможное значение

$$\sum_i |a_i - 1|$$

Ответ: 1
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 6 баллов

Решение:

Покажем, что 3 классов достаточно. На рисунке ниже показаны три ломаные, которые нужно брать по порядку: сначала синюю, потом зелёную, потом оранжевую. Красными точками отмечены специальные клетки.



Если брать эти ломаные в указанном порядке, то:

- первая ломаная относит к первому классу 7 клеток,
- вторая ломаная добавляет ещё 5 новых клеток,
- третья ломаная добавляет оставшиеся 4 клетки.

Теперь найдём минимальное значение

$$\sum_i |a_i - 1|$$

Так как специальных клеток 4, а классов 3, значение 0 получить нельзя: если бы сумма была равна 0, то в каждом классе была бы ровно одна специальная клетка, то есть всего их было бы 3, а не 4.

В нашей конструкции специальные клетки распределяются по классам так:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

Поэтому

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 1| + |a_3 - 1| = |1 - 1| + |1 - 1| + |2 - 1| = 1.$$

Следовательно, минимально возможное значение равно 1.

Задание № 4

Условие:
Есть двое часов. Одни всегда показывают точное время, другие в нечётные часы тоже идут правильно, а в чётные показывают случайный час от 0 до 11 с равной вероятностью; минуты при этом показываются верно. С какой вероятностью показания часов совпадут в случайный момент времени? Считайте, что момент равновероятно выбирается из 12-часового промежутка. Ответ округлите до сотых.
Ответ: 0.54
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов
Максимальный балл за задание — 12

Решение:

В 12-часовом промежутке половина часов нечётные, половина чётные.

В нечётные часы второе устройство работает правильно, поэтому показания совпадают с вероятностью 1.

В чётные часы второе устройство показывает случайный час от 0 до 11. Совпадение будет, только если случайно выбран правильный час. Вероятность этого:

$$\frac{1}{12}$$

Итоговая вероятность:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$$

Округляем:

$$\frac{13}{24} \approx 0.5416\ldots \approx 0.54$$

Условие:

На заводе робот сортирует детали. Чтобы деталь прошла проверку, робот должен правильно определить и её цвет, и её форму. Сейчас сканеры робота работают так:
1. Сначала он определяет цвет. Сейчас он делает это верно в 50 % случаев.
2. Затем для деталей с верно определённым цветом он пытается определить форму. С этим он тоже справляется в 50 % случаев.
Например, если на конвейер поступит 100 деталей, цвет робот угадает у 50 из них. А форму он угадает у половины от этих 50, то есть всего 25 деталей пройдут проверку.
Вы можете улучшать сканеры цвета и формы. Для каждого сканера правила такие:

- повысить точность с 50 % до 60 % можно, использовав 1 шестерёнку;
- с 60 % до 70 % — ещё 3 шестерёнки;
- с 70 % до 80 % — ещё 5 шестерёнок;
- с 80 % до 90 % — ещё 7 шестерёнок.

Всего у вас есть 13 шестерёнок. Какую наибольшую долю от всех деталей робот сможет распознавать полностью правильно, если вы используете шестерёнки самым оптимальным образом? Ответ выразите в процентах.

Ответ: 56

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение:

Чтобы деталь была распознана полностью правильно, робот должен правильно определить и цвет, и форму. Поэтому итоговая доля равна произведению точностей двух сканеров.

Посчитаем, сколько шестерёнок нужно, чтобы довести один сканер до каждого уровня:

$$50\% : 0,$$

$$60\ \% : 1,$$

$$70\ \% : 1 + 3 = 4,$$

$$80\ \% : 1 + 3 + 5 = 9,$$

$$90\ \% : 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Всего есть 13 шестерёнок, поэтому уровень 90 % недостижим даже для одного сканера: он требует 16 шестерёнок.

Остаётся проверить достижимые пары точностей. Возможные уровни: 50 %, 60 %, 70 %, 80 %.

Сделать один сканер точностью 80 % можно с помощью 9 шестерёнок. Остаётся

$$13 - 9 = 4 \text{ шестерёнки},$$

то есть второй сканер можно довести до 70 %.

Получаем:

$$80\% \cdot 70\% = 56\%.$$

Покажем, что лучше нельзя. Чтобы получить больше 56 %, при доступных уровнях нужно было бы иметь хотя бы пару 80 % и 80 % или 90 % и 70%.

Но для 80 % и 80 % необходимы $9 + 9 = 18$ шестерёнок, а 90 % уже сам по себе требует 16 шестерёнок. Оба варианта невозможны.

Все остальные пары дают не больше:

$$70\ \% \cdot 70\ \% = 49\ \%,$$

$$80\ \% \cdot 60\ \% = 48\ \%.$$

Значит, оптимально сделать точности 80 % и 70 %.

Итоговая наибольшая доля:

$$0.8 \cdot 0.7 = 0.56 = 56\ \%.$$

Задание № 6

Условие:

В таблице (XLSX, ODS, CSV) каждая строка содержит два числовых значения:

- показатель уверенности в точности результата,
- стоимость товара.

Считается, что показатель уверенности является достаточным для запуска товара в производство, если соответствующее ему значение $Z - \text{score}$ не превышает 3 по абсолютной величине.

Значение $Z - \text{score}$ для величины x_i находится по формуле:

$$Z - score(x_i) = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

,где $\bar{x}$ — среднее арифметическое всех значений x, а s — стандартное отклонение, вычисляемое по формуле

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Определите суммарную стоимость товаров, не прошедших оценку по $Z - \text{score}$.

Ответ: 1075

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение:

Нужно прочитать таблицу, взять из первого столбца значения x_i, вычислить их среднее арифметическое x, затем стандартное отклонение

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

после этого для каждой строки найти

$$Z - score(x_i) = \frac{x_i - \bar{x}}{s}.$$

Товары не проходят оценку, если

$$|Z - score(x_j)| > 3.$$

Нужно сложить стоимости всех таких товаров. После обработки файла получается ответ: 1075.

Код Python:

```
import pandas as pd
import numpy as np
df = pd.read_csv("data .csv")
x = df . iloc [: , 0]
cost = df . iloc [: , 1]

x_mean = x .mean()
s = np. sqrt ((( x − x_mean) ** 2).sum() / (len(x) − 1))

z = (x − x_mean) / s

answer = int ( cost [ abs(z) > 3].sum())
print(answer)
```