

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ФИЗИКА. 2025–2026 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

КРИТЕРИИ И РЕШЕНИЯ

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1,20$ м с прямоугольным сечением площадью $S = 24 \text{ см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0,4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0,2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_{\text{д}} = 750 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_{\text{ал}} = 2700 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1. Найдите массу доски M . Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)
2. Определите массу груза m , при которой система находится в равновесии. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)
3. Найдите силу реакции опоры N_0 в этом положении. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)
4. Груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, при этом точку его подвеса смещают на расстояние Δx , чтобы доска осталась в горизонтальном положении равновесия. Точка опоры не меняется. Определите расстояние Δx . Ответ выразите в м, округлив до сотых долей. (2 балла)
5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии равновесия к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\frac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $M = 2,16$ кг; 2) $m = 1,08$ кг; 3) $N_0 = 32,4$ Н; 4) $0,14$ м;
5) $\frac{N_1}{N_0} = 0,877$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1,30$ м с прямоугольным сечением площадью $S = 20 \text{ см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0,75L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0,9L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_{\text{д}} = 680 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_{\text{ал}} = 2700 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1. Найдите массу доски M . Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)
2. Определите силу реакции опоры N_0 . Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)
3. Груз полностью погружают в масло плотностью $\rho_{\text{м}} = 820 \text{ кг/м}^3$. На какое расстояние Δx нужно перенести точку подвеса груза, чтобы восстановить равновесие? Точка опоры не меняется. Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)
4. Найдите силу натяжения нити T , удерживающей груз, после полного погружения и смещения точки подвеса. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)
5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 после погружения и смещения к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\frac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $M = 1,77 \text{ кг}$; 2) $N_0 = 47,1 \text{ Н}$; 3) $\Delta x = 0,085 \text{ м}$; 4) $T = 20,52 \text{ Н}$;
5) $\frac{N_1}{N_0} = 0,810$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1,10$ м с прямоугольным сечением площадью $S = 18 \text{ см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. К доске на расстоянии $0,25L$ от левого конца подвешен алюминиевый груз массой $m = 0,65$ кг. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_{\text{д}} = 700 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_{\text{ал}} = 2700 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Затем груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, после чего для восстановления равновесия опору перемещают в новое положение.

1. Найдите массу доски M . Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей.
(2 балла)
2. На каком расстоянии $x_{\text{оп}}$ от левого конца доски находится опора в первоначальном состоянии? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей.
(2 балла)
3. Найдите силу реакции опоры N_0 в первоначальном состоянии. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)
4. На каком расстоянии $x'_{\text{оп}}$ от левого конца доски будет находиться опора в новом положении? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей.
(2 балла)
5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\frac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $M = 1,39$ кг; 2) $x_{\text{оп}} = 0,462$ м; 3) $N_0 = 20,4$ Н; 4) $x'_{\text{оп}} = 0,487$ м;
5) $\frac{N_1}{N_0} = 0,882$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска массой $M = 1,80$ кг и длиной $L = 1,20$ м уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0,4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0,2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_d = 720$ кг/м³ и $\rho_{ал} = 2700$ кг/м³. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Затем груз полностью погружают в жидкость неизвестной плотности $\rho_ж$ и смещают точку подвеса груза на $\Delta x = 0,12$ м влево вдоль доски, так что равновесие системы восстанавливается.

1. Найдите площадь поперечного сечения доски S . Ответ выразите в см², округлив до целого числа. (2 балла)
2. Определите массу груза m . Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)
3. Найдите плотность жидкости $\rho_ж$. Ответ выразите в кг/м³, округлив до целого числа. (2 балла)
4. Найдите силу реакции опоры N_1 после погружения и смещения груза. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)
5. Найдите отношение сил реакции опоры $\frac{N_1}{N_0}$, где N_0 — реакция до погружения. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $S = 21$ см²; 2) $m = 0,90$ кг; 3) $\rho_ж = 900$ кг/м³; 4) $N_1 = 24,00$ Н;
5) $\frac{N_1}{N_0} = 0,889$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной L и массой $M = 2,16$ кг с прямоугольным сечением площадью $S = 24 \text{ см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. К доске на расстоянии $0,25L$ от левого конца подвешен алюминиевый груз массой $m = 1,05$ кг. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_d = 750 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_{ал} = 2700 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. После полного погружения груза в воду плотностью $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ точку опоры переносят вдоль доски так, чтобы система вновь пришла в равновесие.

1. Найдите длину доски L . Ответ выразите в м, округлив до десятых долей.
(2 балла)
2. На каком расстоянии $x_{\text{оп}}$ от левого конца доски находится опора в первоначальном состоянии? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей.
(2 балла)
3. Определите силу Архимеда F_A , действующую на груз в воде. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)
4. На каком расстоянии $x'_{\text{оп}}$ от левого конца доски будет находиться опора в новом положении? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей.
(2 балла)
5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 после погружения к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\frac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до сотых долей.
(2 балла)

Ответы: 1) $L = 1,2$ м; 2) $x_{\text{оп}} = 0,502$ м; 3) $F_A = 3,89$ Н; 4) $x'_{\text{оп}} = 0,530$ м;
5) $\frac{N_1}{N_0} = 0,88$.

Типовое решение для сюжета «Груз над водой, груз в воде»

Уникальные вопросы, встречающиеся в данных задачах

1. Нахождение параметров доски M , S или L при известной ρ_d и одном из S, L, M .
2. Нахождение подвешенного груза m , обеспечивающей равновесие при заданных положениях опоры и точки подвеса (в воздухе).
3. Нахождение положения опоры $x_{\text{оп}}$ в воздухе при заданном m и координате точки подвеса x_{Γ} .
4. Нахождение силы реакции опоры N_0 в воздухе.
5. После полного погружения груза в жидкость плотности $\rho_{\text{ж}}$:
 - (a) нахождение Архимеда F_A и натяжение нити T ;
 - (b) нахождение смещения точки подвеса Δx при фиксированной опоре для восстановления равновесия;
 - (c) нахождение смещения опоры (или её новое положение) при фиксированной точке подвеса;
 - (d) нахождение отношения реакций $\frac{N_1}{N_0}$.
6. Обратные постановки: по известному Δx ; по N_1/N_0 и т. п.

Модель, обозначения и базовые равенства

Прямая тонкая однородная доска длиной L (сечением S , плотностью ρ_d), центр масс доски находится в точке $x_{\text{цм}} = \frac{L}{2}$. Опора находится в точке $x_{\text{оп}}$. Точка подвеса груза — x_{Γ} (после смещения — x'_{Γ}). Ускорение свободного падения равно g . Груз — сплошной алюминиевый ($\rho_{\text{ал}}$), массой m , объём равен $V_{\Gamma} = \frac{m}{\rho_{\text{ал}}}$ (при полном погружении).

Статика: для равновесия необходимо выполнение правила моментов. При этом удобно работать с плечами сил относительно точки опоры:

$$d_p = |x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|, \quad d_{\Gamma} = |x_{\text{оп}} - x_{\Gamma}|, \quad d'_{\Gamma} = |x_{\text{оп}} - x'_{\Gamma}|.$$

Система в воздухе до погружения груза в жидкость

1. Связи между M , S , L :

$$M = \rho_d S L, \quad S = \frac{M}{\rho_d L}, \quad L = \frac{M}{\rho_d S}$$

2. Неизвестная масса груза для равновесия (опора и точка подвеса заданы):

$$m = M \frac{d_p}{d_r} = M \frac{|x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|}{|x_{\text{оп}} - x_r|}$$

3. Положение опоры при заданных M, m, x_r :

$$x_{\text{оп}} = \frac{M x_{\text{цм}} + m x_r}{M + m}$$

4. Реакция опоры:

$$N_0 = (M + m)g$$

Полное погружение груза в жидкость ($\rho_{\text{ж}}$), восстановление равновесия

1. Сила Архимеда и натяжение нити:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V_r = \rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}}$$

На груз, погружённый в жидкость, действуют сила тяжести mg и сила Архимеда F_A , направленная противоположно. Со стороны нити на груз действует сила натяжения T . Условие равновесия груза:

$$T + F_A = mg \quad \Rightarrow \quad T = mg - F_A.$$

Эта сила T и приложена к доске в точке подвеса.

2. Реакция опоры после погружения. На доску действуют сила тяжести Mg , сила натяжения нити T (приложенная в точке подвеса и направленная вниз) и сила реакции опоры N_1 . Условие вертикального равновесия доски:

$$N_1 = Mg + T = Mg + (mg - F_A) = (M + m)g - F_A.$$

Отношение реакций:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{(M + m)g - F_A}{(M + m)g} = 1 - \frac{F_A}{(M + m)g}.$$

3. Смещение точки подвеса при фиксированной опоре ($x_{\text{оп}} = \text{const}$). Условие равенства моментов сил, действующих на доску, относительно точки опоры после погружения груза:

$$Mg \cdot d_p = T \cdot d'_r,$$

где $d_p = |x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|$, $d'_r = |x_{\text{оп}} - x'_r|$, а $T = mg - F_A$. Подставляя выражение для T , получаем

$$Mg \cdot d_p = (mg - F_A) \cdot d'_r.$$

Отсюда находим новое плечо силы натяжения:

$$d'_\Gamma = \frac{Mg \cdot d_p}{mg - F_A} = \frac{M \cdot d_p}{m - \frac{F_A}{g}}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай А. Груз и центр масс доски находятся по одну сторону от опоры (например, слева: $x_\Gamma < x_{\text{оп}}$, $x_{\text{цм}} < x_{\text{оп}}$):

$$x'_\Gamma = x_{\text{оп}} - d'_\Gamma = x_{\text{оп}} - \frac{M \cdot |x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|}{m - \frac{F_A}{g}},$$

$$\Delta x = x'_\Gamma - x_\Gamma = \left(x_{\text{оп}} - \frac{M \cdot |x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|}{m - \frac{F_A}{g}} \right) - x_\Gamma.$$

Случай В. Груз и центр масс доски находятся по разные стороны от опоры (например, $x_\Gamma < x_{\text{оп}}$, $x_{\text{цм}} > x_{\text{оп}}$). Моменты сил направлены в разные стороны. Условие моментов (с учётом знаков) приведёт к тому, что новое плечо d'_Γ может как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от соотношения сил.

4. Смещение/новое положение опоры при фиксированной точке подвеса ($x_\Gamma = \text{const}$). Обозначим новое положение опоры $x'_{\text{оп}}$. Условие равенства моментов сил, действующих на доску, относительно новой точки опоры:

$$Mg \cdot (x_{\text{цм}} - x'_{\text{оп}}) = T \cdot (x'_{\text{оп}} - x_\Gamma),$$

где $T = mg - F_A$. (Предполагается, что все точки лежат на одной прямой и $x_{\text{цм}} < x'_{\text{оп}} < x_\Gamma$ или наоборот.) Решаем уравнение относительно $x'_{\text{оп}}$:

$$\begin{aligned} Mg \cdot x_{\text{цм}} - Mg \cdot x'_{\text{оп}} &= T \cdot x'_{\text{оп}} - T \cdot x_\Gamma, \\ Mg \cdot x_{\text{цм}} + T \cdot x_\Gamma &= (Mg + T) \cdot x'_{\text{оп}}, \\ x'_{\text{оп}} &= \frac{Mg \cdot x_{\text{цм}} + T \cdot x_\Gamma}{Mg + T} = \frac{Mg \cdot x_{\text{цм}} + (mg - F_A) \cdot x_\Gamma}{Mg + (mg - F_A)}. \end{aligned}$$

Обратные задачи

1. По известному смещению точки подвеса Δx (при фиксированной опоре) найти $\rho_{\text{ж}}$. Пусть $d'_\Gamma = |x_{\text{оп}} - x'_\Gamma|$, где $x'_\Gamma = x_\Gamma + \Delta x$. Из правила моментов:

$$Mg \cdot d_p = T \cdot d'_\Gamma = (mg - F_A) \cdot d'_\Gamma.$$

Выражаем F_A :

$$mg - F_A = \frac{Mg \cdot d_p}{d'_\Gamma} \Rightarrow F_A = mg - \frac{Mg \cdot d_p}{d'_\Gamma}.$$

С другой стороны, $F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\Gamma} = \rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}}$. Приравниваем эти выражения

$$\rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}} = mg - \frac{Mg \cdot d_{\text{п}}}{d'_{\Gamma}}.$$

Сокращаем g и выражаем $\rho_{\text{ж}}$:

$$\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ал}} \left(1 - \frac{M \cdot d_{\text{п}}}{m \cdot d'_{\Gamma}} \right) = \rho_{\text{ал}} \left(1 - \frac{M \cdot |x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|}{m \cdot |x_{\text{оп}} - (x_{\Gamma} + \Delta x)|} \right).$$

2. По известному отношению реакций $\frac{N_1}{N_0}$ восстановить F_A и $\rho_{\text{ж}}$. Из формулы для отношения реакций получаем

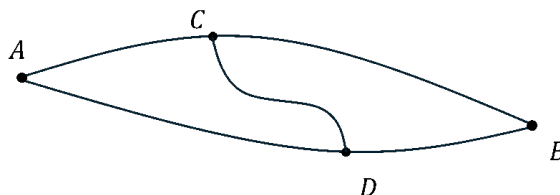
$$\frac{N_1}{N_0} = 1 - \frac{F_A}{(M + m)g} \Rightarrow F_A = \left(1 - \frac{N_1}{N_0} \right) (M + m)g.$$

Зная $F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\Gamma} = \rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}}$, находим

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{F_A}{g} \cdot \frac{\rho_{\text{ал}}}{m} = \left(1 - \frac{N_1}{N_0} \right) (M + m) \cdot \frac{\rho_{\text{ал}}}{m}.$$

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)

Железнодорожные станции А, В, С и D связаны несколькими маршрутами. От станции А до станции В с промежуточной остановкой на станции С ходит поезд «Аист». Он отправляется от А с интервалами 2 ч, начиная с 5:30, а весь маршрут занимает у «Аиста» 280 минут. Также из А в В, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 50 минут, первый «Журавль» отправляется в 5:50, а весь маршрут занимает у него 240 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».



Между станциями С и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции С в направлении D и от станции D в направлении С «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между С и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблицы указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	180	140
CB	270	210
AD	220	320
DB	190	120
CD	60	80

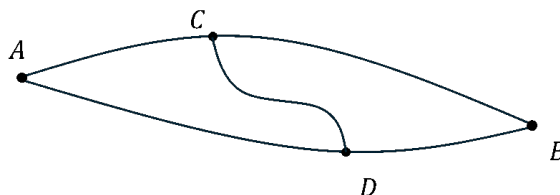
Турист прибыл на станцию А в 9:20, ему нужно добраться до станции В. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

- Найдите минимальную стоимость проезда от А до В. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите минимальное общее время пути по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите среднюю скорость по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию А до прибытия в В (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)
- Найдите минимально возможное время пути из А в В для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 340 руб; 7) 410 мин; 8) 80,5 км/ч; 9) 280 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)

Железнодорожные станции А, В, С и D связаны несколькими маршрутами. От станции А до станции В с промежуточной остановкой на станции С ходит поезд «Аист». Он отправляется от А с интервалами 2 ч 20 мин, начиная с 6:00, а весь маршрут занимает у «Аиста» 300 минут. Также из А в В, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 45 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:15, а весь маршрут занимает у него 255 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».



Между станциями С и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции С в направлении D и от станции D в направлении С «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между С и D занимает у них 25 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
<i>AC</i>	160	130
<i>CB</i>	260	220
<i>AD</i>	230	310
<i>DB</i>	180	130
<i>CD</i>	55	75

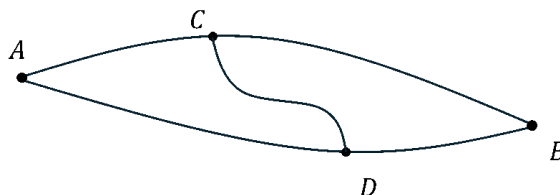
Турист прибыл на станцию А в 10:40, ему нужно добраться до станции В. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

- Найдите минимальную стоимость проезда от А до В. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите минимальное общее время пути по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите среднюю скорость по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию А до прибытия в В (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)
- Найдите минимально возможное время пути из А в В для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 335 руб; 7) 440 мин; 8) 74,3 км/ч; 9) 260 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)

Железнодорожные станции А, В, С и D связаны несколькими маршрутами. От станции А до станции В с промежуточной остановкой на станции С ходит поезд «Аист». Он отправляется от А с интервалами 1 ч 50 мин, начиная с 5:45, а весь маршрут занимает у «Аиста» 320 минут. Также из А в В, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 55 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:10, а весь маршрут занимает у него 280 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».



Между станциями С и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркуты». От станции С в направлении D и от станции D в направлении С «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между С и D занимает у них 15 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
<i>AC</i>	170	150
<i>CB</i>	250	200
<i>AD</i>	240	330
<i>DB</i>	170	110
<i>CD</i>	65	85

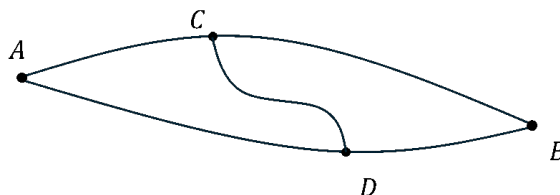
Турист прибыл на станцию А в 9:15, ему нужно добраться до станции В. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

- Найдите минимальную стоимость проезда от А до В. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите минимальное общее время пути по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите среднюю скорость по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию А до прибытия в В (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)
- Найдите минимально возможное время пути из А в В для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 345 руб; 7) 440 мин; 8) 75,7 км/ч; 9) 315 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)

Железнодорожные станции А, В, С и D связаны несколькими маршрутами. От станции А до станции В с промежуточной остановкой на станции С ходит поезд «Аист». Он отправляется от А с интервалами 2 ч 10 мин, начиная с 6:20, а весь маршрут занимает у «Аиста» 310 минут. Также из А в В, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 40 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:40, а весь маршрут занимает у него 330 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».



Между станциями С и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции С в направлении D и от станции D в направлении С «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между С и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
<i>AC</i>	160	140
<i>CB</i>	240	190
<i>AD</i>	210	320
<i>DB</i>	160	120
<i>CD</i>	70	90

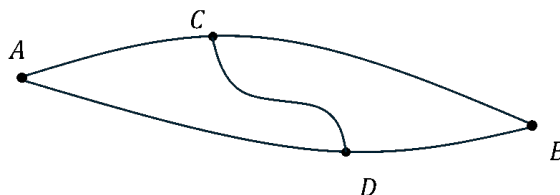
Турист прибыл на станцию А в 9:10, ему нужно добраться до станции В. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

- Найдите минимальную стоимость проезда от А до В. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите минимальное общее время пути по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите среднюю скорость по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию А до прибытия в В (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)
- Найдите минимально возможное время пути из А в В для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 330 руб; 7) 530 мин; 8) 58,9 км/ч; 9) 340 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)

Железнодорожные станции А, В, С и D связаны несколькими маршрутами. От станции А до станции В с промежуточной остановкой на станции С ходит поезд «Аист». Он отправляется от А с интервалами 1 ч 45 мин, начиная с 6:00, а весь маршрут занимает у «Аиста» 295 минут. Также из А в В, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 35 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:15, а весь маршрут занимает у него 265 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».



Между станциями С и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции С в направлении D и от станции D в направлении С «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между С и D занимает у них 18 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой:

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	150	135
CB	230	195
AD	200	310
DB	150	115
CD	75	95

Турист прибыл на станцию А в 8:50, ему нужно добраться до станции В. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

- Найдите минимальную стоимость проезда от А до В. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите минимальное общее время пути по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)
- Найдите среднюю скорость по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию А до прибытия в В (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)
- Найдите минимально возможное время пути из А в В для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 330 руб; 7) 440 мин; 8) 68,9 км/ч; 9) 285 мин.

«Оптимальный маршрут туриста» (типовое решение данной группы задач)

Есть четыре станции A, B, C, D . Поезд «Аист» ходит по ветке $A \rightarrow C \rightarrow B$ с периодом P_A (интервал между отправлениями из A) и полным временем в пути T_{ACB} . Поезд «Журавль» ходит по ветке $A \rightarrow D \rightarrow B$ с периодом P_J и полным временем T_{ADB} . Электричка «Беркут» ходит между C и D в обе стороны каждые 30 мин, время в пути T_{CD} . Даны длины участков и цены на каждый участок. Турист приходит на станцию A в момент T_0 . Временем пересадок пренебрегаем.

Уникальные вопросы, встречающиеся в данных задачах

6. Минимальная стоимость поездки из A в B .
7. Минимальное общее время пути по маршруту $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ (включая время ожидания).
8. Средняя скорость на маршруте $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, считая всё время с момента прихода туриста на A .
9. Минимально возможное время пути из A в B среди всех маршрутов (с ожиданиями).

Решение

1. Стоимость

Складываем цены по четырём маршрутам и берём минимум:

$$\begin{aligned} ACB: C_{AC} + C_{CB}, \quad ADB: C_{AD} + C_{DB}, \\ ACDB: C_{AC} + C_{CD} + C_{DB}, \quad ADCB: C_{AD} + C_{CD} + C_{CB}. \end{aligned}$$

2. Как найти время на каждом участке у «Аиста» и «Журавля»

Скорость поезда на своём длинном маршруте постоянна, поэтому времена на отрезках пропорциональны их длинам:

$$\begin{aligned} t_{AD} &= T_{ADB} \cdot \frac{AD}{AD + DB}, \quad t_{DB} = T_{ADB} - t_{AD}; \\ t_{AC} &= T_{ACB} \cdot \frac{AC}{AC + CB}, \quad t_{CB} = T_{ACB} - t_{AC}. \end{aligned}$$

Эти четыре величины дальше используем в расчётах ожиданий и проездов.

3. Как искать ближайший поезд/электричку после заданного времени

- Если известно время первого отправляющегося рейса T_{start} и период P , то расписание имеет вид

$$T_{\text{start}}, \quad T_{\text{start}} + P, \quad T_{\text{start}} + 2P, \quad \dots$$

Берём первый момент, который не меньше текущего времени.

- Удобно переводить время в минуты от полуночи, чтобы проще сравнивать и добавлять интервалы.

4. Когда «Аист» проходит C , а «Журавль» — D

- Если «Аист» вышел из A в момент T_A , то в момент времени t_{AC} минут он будет в C , то есть в момент времени $T_A + t_{AC}$. Значит, моменты прохода C — это все $T_A + t_{AC}$ для отправок T_A по расписанию «Аиста».
- Аналогично «Журавль», вышедший из A в момент T_J , пройдёт D в $T_J + t_{AD}$.

5. Маршрут $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$: как посчитать полное время Начиная с момента прихода T_0 :

- Ждём ближайший «Журавль» из $A \Rightarrow$ получаем время его отправления T_{AD}^{dep} .
- Едем по маршруту $A \rightarrow D$ за время $t_{AD} \Rightarrow$ прибываем на станцию D в момент $T_D = T_{AD}^{\text{dep}} + t_{AD}$.
- Ждём ближайший «Беркут», следующий из D в $C \Rightarrow$ отправляемся в момент T_{DC}^{dep} , приезжаем на станцию C в момент $T_C = T_{DC}^{\text{dep}} + T_{CD}$.
- Ждём ближайший проход «Аиста» через C (см. п. 4) $\Rightarrow$ получаем момент T_{CB}^{pass} .
- Едем $C \rightarrow B$ время $t_{CB} \Rightarrow$ прибываем на станцию B через время $T_B = T_{CB}^{\text{pass}} + t_{CB}$.

Полное время маршрута в минутах:

$$t_{\text{полн}} = (T_{AD}^{\text{dep}} - T_0) + t_{AD} + (T_{DC}^{\text{dep}} - T_D) + T_{CD} + (T_{CB}^{\text{pass}} - T_C) + t_{CB}.$$

6. Средняя скорость на $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$. Полный путь:

$$S = AD + DC + CB.$$

Полное время в часах:

$$t_h = \frac{t_{\text{полн}}}{60}.$$

Средняя скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t_h}.$$

7. Минимально возможное время из A в B среди всех маршрутов Считаем полные времена для четырёх вариантов и берём минимум:

- ADB : ждём ближайший «Журавль» из A , затем добавляем T_{ADB} .
- ACB : ждём ближайший «Аист» из A , затем добавляем T_{ACB} .

- $ACDB$: едем по маршруту $A \rightarrow C$ на «Аисте» (t_{AC}); далее на ближайшем «Беркуте» по маршруту $C \rightarrow D$ (T_{CD}); далее на ближайшем «Журавлу» через D (см. п. 4), затем по маршруту $D \rightarrow B$ за время t_{DB} .
- $ADCB$: зеркально к предыдущему, но сначала едем на «Журавлу» до станции D , потом на «Беркуте» по маршруту $D \rightarrow C$, затем на «Аисте» через C далее по участку $C \rightarrow B$.

Все ожидания ищем правилом из п. 3; времена на участках берём из п. 2; моменты проходов — из п. 4.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 30,0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 45^\circ\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 200$ г с температурой $t_{\text{л}} = -10^\circ\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг · °C), удельная теплоёмкость льда — $c_{\text{л}} = 2,1$ кДж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)
11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 35$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (3 балла)
12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 20^\circ\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин · °C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{\text{пл}} = 163$ г; 11) $\theta_1 = 10,7^\circ\text{C}$; 12) $\theta_2 = 11,4^\circ\text{C}$.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 25,0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 45^{\circ}\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 250$ г при температуре $t_{\text{л}} = 0^{\circ}\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)
11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 26$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (3 балла)
12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 25^{\circ}\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{\text{пл}} = 175$ г; 11) $\theta_1 = 0,6^{\circ}\text{C}$; 12) $\theta_2 = 2,3^{\circ}\text{C}$.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 25,0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 60^{\circ}\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 150$ г при температуре $t_{\text{л}} = 0^{\circ}\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)
11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 40$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (3 балла)
12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 20^{\circ}\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{\text{пл}} = 150$ г; 11) $\theta_1 = 35,3^{\circ}\text{C}$; 12) $\theta_2 = 33,9^{\circ}\text{C}$.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 35,0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 45^{\circ}\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 190$ г при температуре $t_{\text{л}} = -15^{\circ}\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг · °C), удельная теплоёмкость льда — $c_{\text{л}} = 2,1$ кДж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)
11. Какое количество теплоты Q нужно подвести к системе, чтобы в калориметре осталась только вода при 0°C ? Если тепло отводится, укажите отрицательное значение. Ответ выразите в кДж, округлив до сотых долей. (3 балла)
12. После того, как к калориметру подвели теплоту Q из предыдущего вопроса, теплоизоляция нарушается. Мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 20^{\circ}\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин · °C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{\text{пл}} = 158$ г; 11) $Q = 10,41$ кДж; 12) $\theta_2 = 1,6^{\circ}\text{C}$.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 35,0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 50^{\circ}\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 100$ г при температуре $t_{\text{л}} = 0^{\circ}\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)
11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 20$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (3 балла)
12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 0^{\circ}\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{\text{пл}} = 100$ г; 11) $\theta_1 = 30,2^{\circ}\text{C}$; 12) $\theta_2 = 27,2^{\circ}\text{C}$.

Типовое решение для сюжета «Теплообмен со средой: вода + лёд + калориметр»

Уникальные вопросы, встречающиеся в данных задачах

1. Масса расплавившегося льда после смешивания воды с льдом в калориметре. Определение режима равновесия: частичное плавление при 0°C или полное плавление при температуре выше 0°C .
2. Температура системы после подвода заданного количества теплоты Q нагревателем. Порядок расходования Q : доплавление оставшегося льда $\rightarrow$ нагрев воды и калориметра.
3. «Пороговые» вопросы: сколько тепла нужно отвести, чтобы получить только воду при 0°C (или остаться при 0°C с частью льда).
4. Изменение температуры за малый интервал времени при нарушении теплоизоляции, когда мощность теплообмена задана законом

$$P = K |\theta - t_{\text{окр}}|$$

(При этом берем θ из предыдущего пункта как константу на коротком промежутке), и требуется выразить новую температуру через $\Delta\tau$.

Обозначения

$m_{\text{в}}, t_{\text{в}}, c_{\text{в}}$	— масса, температура и удельная теплоёмкость воды,
$m_{\text{л}}, t_{\text{л}}, c_{\text{л}}, \lambda$	— масса, температура, удельная теплоёмкость и теплота плавления льда
C	— теплоёмкость калориметра, $t_{\text{окр}}$ — температура среды,
Q	— тепло нагревателя (со знаком: $Q > 0$ — подводим, $Q < 0$ — отводим),
K	— коэффициент теплопередачи в формуле $P = K \theta - t_{\text{окр}} $,
$\Delta\tau$	— длительность теплообмена с окружающей средой.

Шаг 1. Смешивание воды и льда (без нагревателя, сосуд теплоизолирован). Эффективная теплоёмкость «вода + калориметр»:

$$C_0 = m_{\text{в}}c_{\text{в}} + C \quad [\text{кДж}/^\circ\text{C}].$$

Доступная теплота при охлаждении воды и калориметра до 0°C :

$$Q_{\text{дост}} = C_0 (t_{\text{в}} - 0).$$

Теплота на доведение льда до 0°C (если $t_{\text{л}} < 0^\circ\text{C}$):

$$Q_{\text{наг}} = m_{\text{л}}c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}),$$

Если $t_{\text{л}} = 0^\circ\text{C}$, то $Q_{\text{наг}} = 0$. Оставшаяся на плавление теплота:

$$Q_{\text{пл, доступ}} = Q_{\text{дост}} - Q_{\text{наг}}.$$

Случай А: $0 \leq Q_{\text{пл, доступ}} < m_{\text{л}}\lambda$ (частичное плавление). Тогда равновесная температура составляет $\theta = 0^\circ\text{C}$, масса расплавившегося льда равна

$$m_{\text{пл}} = \frac{Q_{\text{пл, доступ}}}{\lambda}, \quad m_{\text{ост}} = m_{\text{л}} - m_{\text{пл}}.$$

Случай В: $Q_{\text{пл, доступ}} \geq m_{\text{л}}\lambda$ (полное плавление). Вся масса льда тает: $m_{\text{пл}} = m_{\text{л}}$. Избыток теплоты после плавления составляет

$$Q_{\text{изб}} = Q_{\text{пл, доступ}} - m_{\text{л}}\lambda.$$

Теперь нагреваются вода и калориметр с полной массой воды $m_{\text{в}}^* = m_{\text{в}} + m_{\text{л}}$:

$$C_1 = m_{\text{в}}^*c_{\text{в}} + C, \quad \theta = \frac{Q_{\text{изб}}}{C_1} (> 0^\circ\text{C}).$$

Шаг 2. Подвод тепла нагревателем Q и температура θ_1 . Если после шага 1 остался лёд ($\theta = 0^\circ\text{C}$, $m_{\text{ост}} > 0$), то

$$Q_1 = m_{\text{ост}}\lambda.$$

Если $0 \leq Q < Q_1$, идёт только плавление:

$$\theta_1 = 0^\circ\text{C}, \quad m'_{\text{ост}} = m_{\text{ост}} - \frac{Q}{\lambda}.$$

Если $Q \geq Q_1$, сначала доплавляется лёд, затем смесь нагревается:

$$Q_2 = Q - Q_1, \quad C_1 = (m_{\text{в}} + m_{\text{л}})c_{\text{в}} + C, \quad \theta_1 = 0^\circ\text{C} + \frac{Q_2}{C_1}.$$

Если после шага 1 весь лёд растаял ($\theta > 0^\circ\text{C}$):

$$C_1 = (m_{\text{в}} + m_{\text{л}})c_{\text{в}} + C, \quad \theta_1 = \theta + \frac{Q}{C_1}.$$

Шаг 2' (пороговый вопрос). Сколько тепла нужно, чтобы получить только воду при 0°C ?

$$Q_{\text{нуж}} = \begin{cases} m_{\text{ост}}\lambda, & \text{если после первого шага } \theta = 0^\circ\text{C}, m_{\text{ост}} > 0 \text{ (тепло подводим);} \\ -C_1\theta, & \text{если после первого шага } \theta > 0^\circ\text{C} \text{ (тепло отводим, } Q < 0). \end{cases}$$

Шаг 3. Кратковременный теплообмен с окружающей средой ($\Delta\tau$ мало).

По условию мощность теплообмена берут по начальной разности температур:

$$P = K |\theta_1 - t_{\text{окр}}| \quad (\text{считаем постоянной на интервале } \Delta\tau).$$

Теплота, полученная системой (со знаком), составляет

$$Q_{\text{сист}} = \begin{cases} +P \Delta\tau, & \theta_1 < t_{\text{окр}} \text{ (среда нагревает систему);} \\ -P \Delta\tau, & \theta_1 > t_{\text{окр}} \text{ (система охлаждается).} \end{cases}$$

Если весь лёд растаял, то

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{Q_{\text{сист}}}{C_1}.$$

Если при $\theta_1 = 0^\circ\text{C}$ лёд ещё есть, то при $t_{\text{окр}} > 0^\circ\text{C}$ поступающее тепло сначала плавит лёд и масса образовавшейся из него воды определяется как

$$m = \min\left\{ m'_{\text{ост}}, \frac{P \Delta\tau}{\lambda} \right\}.$$

Если $P \Delta\tau > \lambda m'_{\text{ост}}$, то остаток тепла нагревает воду:

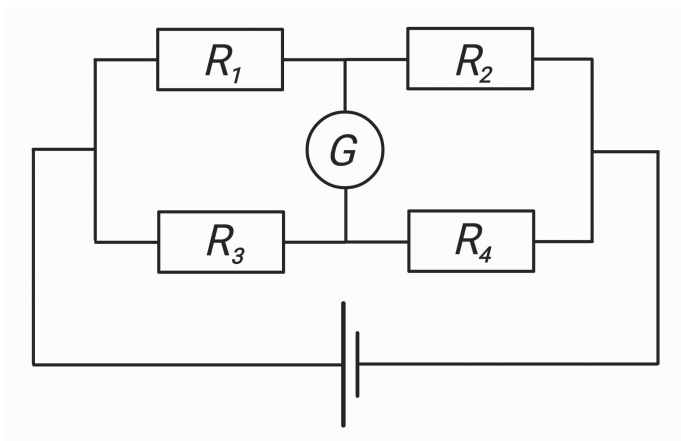
$$\theta_2 = 0^\circ\text{C} + \frac{P \Delta\tau - \lambda m'_{\text{ост}}}{C_1};$$

иначе остаёмся при $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$ с уменьшенным количеством льда. При $t_{\text{окр}} < 0^\circ\text{C}$ возможна обратная картина: тепло уходит и часть воды может кристаллизироваться на величину $m_{\text{крист}} = \min\{m_{\text{в}} + m_{\text{л}} - m_{\text{лёд}}, |Q_{\text{сист}}|/\lambda\}$.

Четыре резистора (10 баллов)

В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 120 \text{ Ом}$, $R_2 = 180 \text{ Ом}$, $R_3 = 75 \text{ Ом}$ и напряжение идеального источника $U = 12 \text{ В}$. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_4 . Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)
14. Определите ток I через резистор R_3 . Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)
15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)
16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

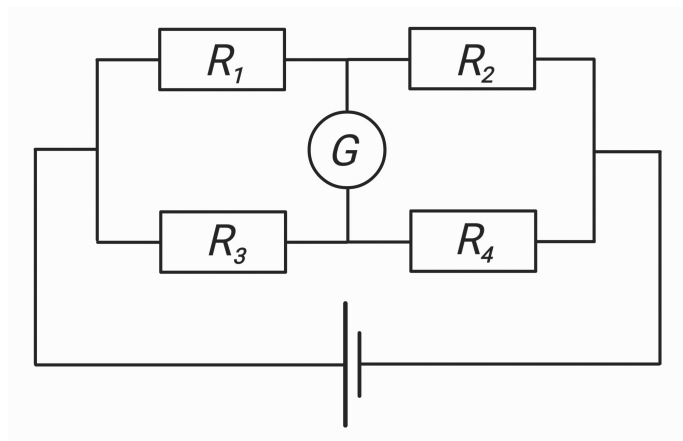


Ответы: 13) 112,5 Ом; 14) 64 мА; 15) 1,25 Вт; 16) 0,46 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 250 \text{ Ом}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$ и напряжение идеального источника $U = 18 \text{ В}$. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_3 . Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)
14. Определите ток I через резистор R_3 . Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)
15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)
16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите минимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

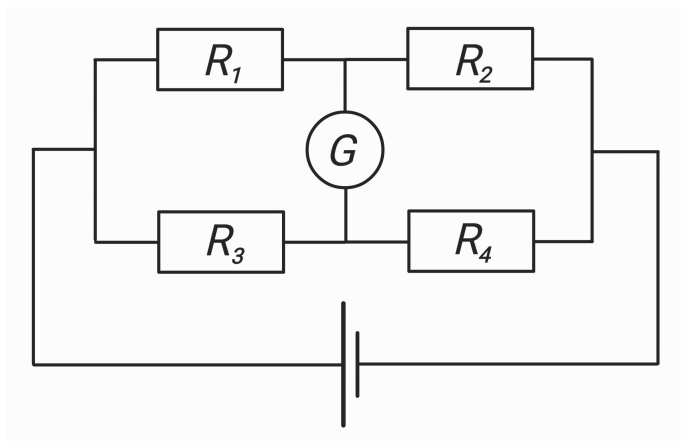


Ответы: 13) 80,0 Ом; 14) 64 мА; 15) 2,08 Вт; 16) 0,26 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 150 \text{ Ом}$, $R_3 = 82 \text{ Ом}$, $R_4 = 120 \text{ Ом}$ и напряжение идеального источника $U = 24 \text{ В}$. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_2 . Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)
14. Определите ток I через резистор R_1 . Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)
15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)
16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите минимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

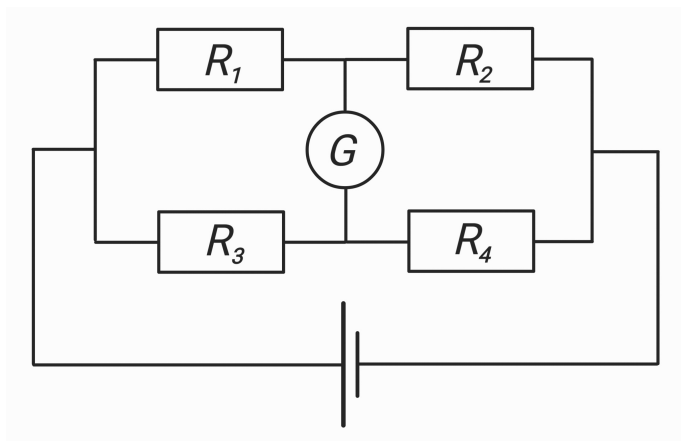


Ответы: 13) 219,5 Ом; 14) 65 мА; 15) 4,41 Вт; 16) 0,63 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_2 = 220 \text{ Ом}$, $R_3 = 68 \text{ Ом}$, $R_4 = 150 \text{ Ом}$ и напряжение идеального источника $U = 15 \text{ В}$. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_1 . Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)
14. Определите ток I через резистор R_4 . Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)
15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)
16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

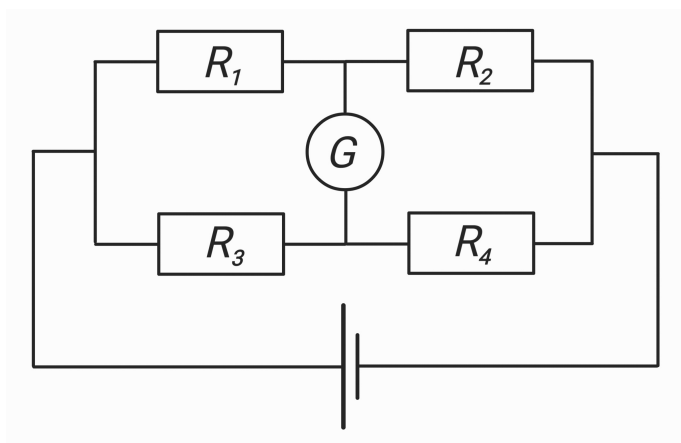


Ответы: 13) 99,7 Ом; 14) 69 мА; 15) 1,74 Вт; 16) 0,71 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 300 \text{ Ом}$, $R_4 = 150 \text{ Ом}$. Ток через резистор R_1 равен $0,10 \text{ А}$. Напряжение источника идеальное. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите напряжение источника U . Ответ выразите в вольтах, округлив до десятых. (2 балла)
14. Найдите ток I через резистор R_4 . Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)
15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)
16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Ответы: 13) 50,0 В; 14) 200 мА; 15) 15,00 Вт; 16) 6,00 Вт.

Типовое решение для сюжета «Четыре резистора»

Уникальные вопросы, встречающиеся в задачах

1. Определение неизвестного сопротивления по условию нулевого тока через гальванометр (баланс моста).
2. Нахождение токов в заданных резисторах.
3. Эквивалентное сопротивление всей схемы и полная мощность, выделяемая в цепи.
4. Мощности на каждом резисторе; выбор максимальной/минимальной из них.
5. Восстановление напряжения источника по известному току в одной из ветвей или через один из резисторов.

Модель и обозначения

Схема — мост Уитстона с нулевым током в гальванометре G . Верхний узел — плюс источника с напряжением U , нижний — минус. Левая ветвь — последовательно R_1 и R_2 ; правая ветвь — последовательно R_3 и R_4 . Обозначим

$$R_A = R_1 + R_2, \quad R_B = R_3 + R_4.$$

Найдем токи по ветвям (они одинаковы в последовательно соединённых резисторах своей ветви):

$$I_A = \frac{U}{R_A} \text{ (через } R_1, R_2), \quad I_B = \frac{U}{R_B} \text{ (через } R_3, R_4).$$

Нулевой ток в G означает равенство потенциалов средних точек ветвей.

Баланс моста: как найти неизвестный резистор

Условие нулевого тока через G (условие баланса) эквивалентно следующему

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \iff R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

Отсюда мгновенно выражаются любые неизвестные:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}, \quad R_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2}, \quad R_2 = \frac{R_1 R_4}{R_3}, \quad R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

При балансе ветви электрически независимы (перемычка не передаёт ток), поэтому их можно считать просто двумя последовательными цепями, подключёнными параллельно к одному источнику.

Токи, напряжения, эквивалентное сопротивление

Токи по ветвям:

$$I_A = \frac{U}{R_1 + R_2}, \quad I_B = \frac{U}{R_3 + R_4}.$$

Токи через отдельные резисторы:

$$I_{R_1} = I_{R_2} = I_A, \quad I_{R_3} = I_{R_4} = I_B.$$

Падения напряжения:

$$U_{R_1} = I_A R_1, \quad U_{R_2} = I_A R_2, \quad U_{R_3} = I_B R_3, \quad U_{R_4} = I_B R_4,$$

при этом $U_{R_1} + U_{R_2} = U_{R_3} + U_{R_4} = U$.

Эквивалентное сопротивление всей цепи (параллель R_A и R_B):

$$R_\Sigma = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Полная мощность:

$$P_\Sigma = \frac{U^2}{R_\Sigma} = U(I_A + I_B).$$

Мощности на каждом резисторе; как найти максимум/минимум

Мощность на резисторе R в своей ветви составляет $P = I^2 R$. Тогда

$$P_1 = I_A^2 R_1, \quad P_2 = I_A^2 R_2, \quad P_3 = I_B^2 R_3, \quad P_4 = I_B^2 R_4.$$

Полезные соотношения при балансе:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{P_3}{P_4} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Чтобы выбрать максимальную/минимальную мощность, достаточно сравнить два значения из левой ветви $\{I_A^2 R_1, I_A^2 R_2\}$ и два из правой $\{I_B^2 R_3, I_B^2 R_4\}$, а затем сравнить наибольшие (или наименьшие) из ветвей между собой. Удобно сначала вычислить I_A и I_B , затем перемножить на соответствующие сопротивления.

Проверка: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_\Sigma$.

Восстановление напряжения источника по известному току

Если известен, например, ток через R_1 , то это ток всей левой ветви: $I_{R_1} = I_A$. Напряжение источника составляет

$$U = I_A(R_1 + R_2).$$

Аналогично если известен ток через R_4 (правую ветвь), то $U = I_B(R_3 + R_4)$. Далее действуют общие формулы для мощностей и эквивалентного сопротивления.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B , находящимися на одной реке на расстоянии $S = 18$ км, курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В тот момент, когда катер выходит из пункта A , вместе с ним также отправляется плот в направлении пункта B . Скорость катера относительно воды равна $V_k = 21$ км/ч, скорость течения реки равна $V_T = 3$ км/ч.

17. На каком расстоянии d_1 от A произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
18. На каком расстоянии d_2 от A произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)
20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B ? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $d_1 = 4.5$ км; 18) $d_2 = 6.0$ км; 19) 6; 20) $L_{\max} = 15.8$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B на одной реке, удалёнными друг от друга на $S = 24$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно отправляется плот в сторону B . Скорость катера относительно воды составляет $V_k = 18$ км/ч, скорость течения реки — $V_T = 3$ км/ч.

17. Через какое время от начала движения произойдёт первая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)
18. Через какое время от начала движения произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)
19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)
20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B ? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $t_1 = 2,3$ ч; 18) $t_2 = 3,2$ ч; 19) $N = 5$; 20) $L_{\max} = 20,6$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B , находящимися на одной реке на расстоянии $S = 30$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно с ним отправляется по течению плот в направлении B . Скорость катера относительно воды составляет $V_k = 21$ км/ч, скорость течения реки — $V_t = 3$ км/ч.

17. На каком расстоянии от B произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
18. На каком расстоянии от B произойдёт третья встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)
20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B ? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $d_1 = 22,5$ км; 18) $d_3 = 15,0$ км; 19) $N = 6$; 20) $L_{\max} = 26,3$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B находящимися на одной реке на расстоянии $S = 36$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A вместе с ним отправляется по течению плот к пункту B . Скорость течения реки составляет $V_t = 4$ км/ч. Известно, что первая встреча катера с плотом произошла на расстоянии $d_1 = 9$ км от пункта A .

17. Определите скорость катера V_k относительно воды. Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (2 балла)
18. На каком расстоянии от пункта A произошла вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)
20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B ? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы; 17) $V_k = 28,0$ км/ч; 18) $d_2 = 12,0$ км; 19) $N = 6$; 20) $L_{\max} = 31,5$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B , находящимися на одной реке на расстоянии $S = 20$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно с ним отправляется плот по течению к B . Скорость катера относительно воды составляет $V_k = 28$ км/ч, скорость течения реки — $V_T = 4$ км/ч.

17. На каком расстоянии от A произойдёт третья встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
18. Через какое время от начала движения произойдёт четвёртая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)
19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)
20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B ? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $d_3 = 10,0$ км; 18) $t_4 = 3,3$ ч; 19) $N = 6$; 20) $L_{\max} = 17,5$ км.

Типовое решение для сюжета «Катер и плот»

1. Найти первую/вторую/третью встречу: момент времени от старта или место встречи (расстояние от A или от B).
2. Определить, сколько встреч произойдёт до прихода плота в пункт B .
3. Найти максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до момента прихода плота в B .
4. Обратная задача: по известному месту первой встречи d_1 найти скорость катера $V_{\text{к}}$.

Обозначения и модель

Ось x направлена от A к B , $x = 0$ — пункт A , $x = S$ — пункт B .

$v_{\downarrow} = V_{\text{к}} + V_{\text{т}}$ (катер вниз по течению), $v_{\uparrow} = V_{\text{к}} - V_{\text{т}} > 0$ (катер вверх по течению),

Плот идёт равномерно: $x_{\text{п}}(t) = V_{\text{т}} t$. Время прихода плота в B составляет

$$t_B = \frac{S}{V_{\text{т}}}.$$

Движение катера — «пила» из отрезков:

$$(1\text{-й спуск}) \quad x_{\text{к}}(t) = v_{\downarrow} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{S}{v_{\downarrow}};$$

$$(1\text{-й подъём}) \quad x_{\text{к}}(t) = S - v_{\uparrow} \left(t - \frac{S}{v_{\downarrow}} \right), \quad \frac{S}{v_{\downarrow}} \leq t \leq \frac{S}{v_{\downarrow}} + \frac{S}{v_{\uparrow}};$$

далее период $T = \frac{S}{v_{\downarrow}} + \frac{S}{v_{\uparrow}}$ повторяется.

1. Первая и вторая встречи: вывод формул

Будем называть «спуском» движение катера по течению, а «подъёмом» — движение против течения.

(а) Первая встреча: t_1 и d_1

Первая нетривиальная встреча происходит во время движения катера против течения (при движении по течению они находятся в одной точке лишь в момент старта). Решаем уравнение $x_{\text{к}}(t) = x_{\text{п}}(t)$ на участке подъёма:

$$S - v_{\uparrow} \left(t - \frac{S}{v_{\downarrow}} \right) = V_{\text{т}} t.$$

Переносим t -слагаемые влево, постоянные вправо:

$$v_{\uparrow} t + V_{\text{т}} t = S + \frac{v_{\uparrow} S}{v_{\downarrow}} \Rightarrow t(v_{\uparrow} + V_{\text{т}}) = S \left(1 + \frac{v_{\uparrow}}{v_{\downarrow}} \right).$$

Подставляем $v_{\uparrow} = V_{\text{к}} - V_{\text{т}}$ и $v_{\downarrow} = V_{\text{к}} + V_{\text{т}}$. Преобразуем выражение в левых скобках: $v_{\uparrow} + V_{\text{т}} = (V_{\text{к}} - V_{\text{т}}) + V_{\text{т}} = V_{\text{к}}$. Преобразуем выражение в правых скобках:

$$1 + \frac{v_{\uparrow}}{v_{\downarrow}} = 1 + \frac{V_{\text{к}} - V_{\text{т}}}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}} = \frac{(V_{\text{к}} + V_{\text{т}}) + (V_{\text{к}} - V_{\text{т}})}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}} = \frac{2V_{\text{к}}}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}}.$$

Отсюда получаем

$$t_1 = \frac{S \cdot \frac{2V_{\text{к}}}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}}}{V_{\text{к}}} = \frac{2S}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}}.$$

Координата встречи определяется плотом:

$$d_1 = x_{\text{п}}(t_1) = V_{\text{т}} t_1 = \frac{2S V_{\text{т}}}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}}.$$

(б) Вторая встреча t_2 и d_2

Вторая встреча происходит на следующем спуске катера (он стартует из A в момент $t_A^{(1)} = \frac{S}{v_{\downarrow}} + \frac{S}{v_{\uparrow}}$). На этом участке

$$x_{\text{к}}(t) = v_{\downarrow} \left(t - t_A^{(1)} \right), \quad x_{\text{п}}(t) = V_{\text{т}} t.$$

Запишем условие равенства координат:

$$v_{\downarrow} t - v_{\downarrow} t_A^{(1)} = V_{\text{т}} t \Rightarrow t(v_{\downarrow} - V_{\text{т}}) = v_{\downarrow} t_A^{(1)}.$$

Подставим $v_{\downarrow} - V_{\text{т}} = (V_{\text{к}} + V_{\text{т}}) - V_{\text{т}} = V_{\text{к}}$ и $t_A^{(1)} = \frac{S}{v_{\downarrow}} + \frac{S}{v_{\uparrow}}$:

$$t_2 = \frac{v_{\downarrow} \left(\frac{S}{v_{\downarrow}} + \frac{S}{v_{\uparrow}} \right)}{V_{\text{к}}} = \frac{S + S \frac{v_{\downarrow}}{v_{\uparrow}}}{V_{\text{к}}} = \frac{S}{V_{\text{к}}} \left(1 + \frac{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}}{V_{\text{к}} - V_{\text{т}}} \right) = \frac{2S}{V_{\text{к}} - V_{\text{т}}}.$$

Найдём координату этой встречи:

$$d_2 = x_{\text{п}}(t_2) = V_{\text{т}} t_2 = \frac{2S V_{\text{т}}}{V_{\text{к}} - V_{\text{т}}}.$$

(в) Обобщение на все встречи

Повторяя рассуждение для каждого последующего подъёма и спуска, получаем две серии:

$$t_{2m-1} = \frac{2m S}{V_{\text{к}} + V_{\text{т}}} \quad (\text{встречи на подъёмах}), \quad t_{2m} = \frac{2m S}{V_{\text{к}} - V_{\text{т}}} \quad (\text{встречи на спусках}),$$

Точки на реке для этих встреч определяется плотом: $d_n = V_{\text{т}} t_n$. Если в задаче требуется найти расстояние от B , берём $S - d_n$.

2. Сколько встреч до прихода плота в B

Учитываем все целые $m \geq 1$, для которых моменты не превосходят $t_B = \frac{S}{V_T}$:

$$\frac{2mS}{V_K + V_T} \leq \frac{S}{V_T} \iff m \leq \frac{V_K + V_T}{2V_T} \quad (\text{серия подъёмов}),$$

$$\frac{2mS}{V_K - V_T} \leq \frac{S}{V_T} \iff m \leq \frac{V_K - V_T}{2V_T} \quad (\text{серия спусков}).$$

Дальше — чисто «счётная» процедура: выпишем натуральные $m = 1, 2, \dots$ и возьмём все, которые удовлетворяют выше неравенствам, *по каждой серии*. Объединим оба списка и, если в обоих оказался момент $t = t_B$, посчитаем его один раз. Число получившихся моментов и есть искомое количество встреч N .

3. Максимальное расстояние $L_{\max}$ до t_B

На каждом отрезке движение линейно, поэтому

$$L(t) = |x_K(t) - x_{\Pi}(t)|$$

меняется равномерно; наибольшие значения этой функции до t_B достигаются в концах отрезков: в момент старта, в моменты разворота катера и в момент t_B . Моменты разворотов:

$$t_B^{(m)} = m \frac{S}{v_{\downarrow}} + (m-1) \frac{S}{v_{\uparrow}} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad t_A^{(m)} = m \frac{S}{v_{\downarrow}} + m \frac{S}{v_{\uparrow}} = mT \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Значения $L(t)$ в них считаются «в одну строчку»:

$$L(t_B^{(m)}) = |S - V_T t_B^{(m)}| = S - V_T t_B^{(m)} \quad (\text{до } t_B), \quad L(t_A^{(m)}) = |0 - V_T t_A^{(m)}| = V_T t_A^{(m)}.$$

Будем перебирать $m = 1, 2, \dots$, пока соответствующий момент не превосходит t_B , и возьмём максимум из набора

$$\{ L(0) = 0; L(t_B^{(1)}), L(t_B^{(2)}), \dots; L(t_A^{(1)}), L(t_A^{(2)}), \dots; L(t_B) = 0 \}.$$

На практике часто хватает первых двух значений:

$$L(t_B^{(1)}) = S - \frac{S V_T}{V_K + V_T} = S \cdot \frac{V_K}{V_K + V_T}, \quad L(t_A^{(1)}) = V_T \left(\frac{S}{V_K + V_T} + \frac{S}{V_K - V_T} \right).$$

Сравним их (и при необходимости следующее m) и выберем наибольшее.

4. Обратная задача: найти V_K по d_1

Первая встреча происходит на подъёме, а её координата определяется плотом:

$$d_1 = V_T t_1 = V_T \cdot \frac{2S}{V_K + V_T}.$$

Отсюда прямо выражается искомая скорость катера:

$$V_K = \frac{2S V_T}{d_1} - V_T.$$

Графическое решение задачи является более простым. На графике (см. рисунок) по оси t — время до $t_B = S/V_T$, по оси x — координата: ломаная линия описывает движение катера (развороты в точках A и B), прямая — движение плота, точки пересечения — все встречи. По вершинам «пилы» удобно проверять $L_{\max}$.

Катер и плот: графическое решение ($S=18$ км, $V_K=21$ км/ч, $V_T=3$ км/ч)

