10 класс

Задача 1.1. Назовите максимальное натуральное число $n > 100$ такое, что при стирании двух последних цифр оно уменьшается ровно в 112 раз?

Ответ: 896.

Решение. Предположим, последние две цифры числа n образуют двухзначное число y, а после стирания осталось число x. Получим, что $n = 100x + y = 112x$

Тогда $y = 12x$ и y делится на 12. Максимальное двухзначное y, делящееся на 12, равно 96. Для него $x = 8$, и тогда $n = 100x + y = 896$. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 1.2. Назовите максимальное натуральное число $n > 100$ такое, что при стирании двух последних цифр оно уменьшается ровно в 113 раз?

Ответ: 791.

Задача 1.3. Назовите максимальное натуральное число $n > 100$ такое, что при стирании двух последних цифр оно уменьшается ровно в 114 раз?

Ответ: 798.

Задача 1.4. Назовите максимальное натуральное число $n > 100$ такое, что при стирании двух последних цифр оно уменьшается ровно в 115 раз?

Ответ: 690.

Задача 2.1. В конкурсе участвовало несколько танцевальных пар. Каждый пожал руку всем остальным, кроме себя и своего партнера. Всего было сделано 20200 рукопожатий. Сколько было пар?

Ответ: 101

Решение. Предположим, что в конкурсе участвовало n пар. Заметим, что тогда каждый человек пожал руки $n-1$ человеку. И тогда количество рукопожатий равно $2n(n-1) = 20200$. Получили квадратное уравнение на n с двумя корнями 101 и -100. Так как количество пар натуральное, подходит только $n = 101$. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 2.2. В конкурсе участвовало несколько танцевальных пар. Каждый пожал руку всем остальным, кроме себя и своего партнера. Всего было сделано 80400 рукопожатий. Сколько было пар?

Ответ: 201

Задача 3.1. Последовательность целых чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 1000$ и $x_{n+1} = |x_n - 7|$ для всех $n > 1$. Найдите такое минимальное n, что $x_{n+2} = x_n$.

Ответ: 143

Решение. Заметим, что это члены этой последовательности будут уменьшаться каждый раз на 7 до тех пор, пока не станут меньше 7. Это произойдет спустя 143 итерации, то есть $x_{143} = 1000 - 142 \cdot 7 = 6$. Потом получим $x_{144} = 1$ и $x_{145} = 6 = x_{143}$. $\square$

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 3.2. Последовательность целых чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 1100$ и $x_{n+1} = |x_n - 6|$ для всех $n > 1$. Найдите такое минимальное n, что $x_{n+2} = x_n$.

Ответ: 184

Задача 3.3. Последовательность целых чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 1300$ и $x_{n+1} = |x_n - 7|$ для всех $n > 1$. Найдите такое минимальное n, что $x_{n+2} = x_n$.

Ответ: 186

Задача 3.4. Последовательность целых чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 1400$ и $x_{n+1} = |x_n - 11|$ для всех $n > 1$. Найдите такое минимальное n, что $x_{n+2} = x_n$.

Ответ: 128

Задача 4.1. На праздновании Нового Года 40 школьников встали в хоровод. Каждую минуту один из школьников, которому не дарили подарков и который не дарил подарок, дарит подарок одному из двух ближайших **слева** соседей (можно дарить подарок школьнику, даже если у него уже есть подарок). Когда каждый школьник подарил или получил хотя бы один подарок, обмен подарками заканчивается.

(а) (2 балла) Какое максимальное количество школьников могло получить подарки?

(б) (5 баллов) Какое минимальное количество школьников могло получить подарки?

Ответ: а) 39
б) 14

Решение. а) *Оценка.* Заметим, что школьник, который первым получит подарок, сам не сможет подарить подарок кому-либо. А каждый оставшийся школьник подарит не более одного подарка. Поэтому подарков будет подарено не более 39.

Пример. Перенумеруем школьников от 1 до 40 так, что первый стоит слева от второго. Пусть второй подарит подарок первому, затем третий подарит подарок второму, затем четвёртый подарит подарок третьему, ..., 40-й подарит подарок 39-му. Тогда будет подарено 39 подарков.

б) *Оценка.* Рассмотрим произвольных трех подряд идущих школьников. Тогда кто-то из них должен получить подарок. Действительно, если правый из них не получил подарок, то он должен был подарить его. А дарить подарок правый может только центральному или левому. Следовательно, среди любых трёх подряд идущих школьников хотя бы один из них получит подарок. Если школьников, получивших подарок, не более 13, то остальные окажутся разбиты на не более чем 13 групп (состоящие из стоящих подряд школьников). Значит, найдётся группа, состоящая из не менее чем трёх человек (осталось не менее 27 школьников, $27 > 2 \cdot 13$). Получаем противоречие. Таким образом, школьников, получивших подарок, не менее 14.

Пример. Разобьём школьников на 13 групп по 3 подряд идущих человека, и ещё одного школьника. В каждой группе из 3 пусть правый и центральный подарят по подарку левому в своей тройке. А оставшийся школьник подарит подарок соседу слева. Тогда всего будет 14 школьников, получивших подарки. □

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 2 балла.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 5 баллов.

Задача 4.2. На праздновании Нового Года 43 школьника встали в хоровод. Каждую минуту один из школьников, которому не дарили подарков и который не дарил подарок, дарит подарок одному из двух ближайших **слева** соседей (можно дарить подарок школьнику, даже если у него уже есть подарок). Когда каждый школьник подарил или получил хотя бы один подарок, обмен подарками заканчивается.

(а) (2 балла) Какое максимальное количество школьников могло получить подарки?

(б) (5 баллов) Какое минимальное количество школьников могло получить подарки?

Ответ: а) 42
б) 15

Задача 4.3. На праздновании Нового Года 46 школьников встали в хоровод. Каждую минуту один из школьников, которому не дарили подарков и который не дарил подарок, дарит подарок одному из двух ближайших **слева** соседей (можно дарить подарок школьнику, даже если у него уже есть подарок). Когда каждый школьник подарил или получил хотя бы один подарок, обмен подарками заканчивается.

(а) (2 балла) Какое максимальное количество школьников могло получить подарки?

(б) (5 баллов) Какое минимальное количество школьников могло получить подарки?

Ответ: а) 45
б) 16

Задача 5.1. В описанном четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$. Известно, что $AB = 5$, $BC = 3$. Найдите, чему равно CD.

Ответ: 7.5

Решение. Обозначим сторону CD через x. Так как треугольники ABC и ACD прямоугольные, то

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = 34 + x^2$$

.

Поскольку четырехугольник описанный, получаем равенство $AB + CD = BC + AD$ и

$$AD^2 = (AB + CD - BC)^2 = (2 + x)^2$$

$$34 + x^2 = 4 + 4x + x^2$$

$$x = \frac{34 - 4}{4} = 7,5.$$

□

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 5.2. В описанном четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$. Известно, что $AB = 4$, $BC = 3$. Найдите, чему равно CD.

Ответ: 12

Задача 5.3. В описанном четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$. Известно, что $AB = 7$, $BC = 5$. Найдите, чему равно CD.

Ответ: 35/2

Задача 5.4. В описанном четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$. Известно, что $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите, чему равно CD.

Ответ: 15

Задача 6.1. Каждый член последовательности натуральных чисел, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а восьмой член равен 1313.
(а) (5 баллов) Сколько существует таких последовательностей?
(б) (2 балла) Чему равен второй член последовательности, если первый равен 13?

Ответ: а) 12
б) 93

Решение. Пусть первый член последовательности равен a, а второй равен b. Следуя формуле для членов этой последовательности, получим, что восьмой член равен $8a + 13b = 1313$. Значит, a делится на 13, т.е. $a = 13$ для некоторого натурального c. Если поделить полученное равенство на 13, получим, что $8c + b = 101$.

(а) Так как $8c < 101$, число c не превосходит $\lfloor \frac{101}{8} \rfloor = 12$. Нетрудно видеть, что каждое такое c действительно соответствует последовательности из условия.

(б) Если $a = 13$, то $c = 1$ и $b = 101 - 8c = 93$.

□

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 5 баллов.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 2 балла.

Задача 6.2. Каждый член последовательности натуральных чисел, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а восьмой член равен 2613.
(а) (5 баллов) Сколько существует таких последовательностей?
(б) (2 балла) Чему равен второй член последовательности, если первый равен 13?

Ответ: а) 25
б) 193

Задача 6.3. Каждый член последовательности натуральных чисел, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а восьмой член равен 3900.
(а) (5 баллов) Сколько существует таких последовательностей?
(б) (2 балла) Чему равен второй член последовательности, если первый равен 13?

Ответ: а) 37
б) 292

Задача 6.4. Каждый член последовательности натуральных чисел, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а восьмой член равен 650.
(а) (5 баллов) Сколько существует таких последовательностей?
(б) (2 балла) Чему равен второй член последовательности, если первый равен 13?

Ответ: а) 6
б) 42

Задача 7.1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что касательная в точке D к описанной окружности параллельна биссектрисе угла ABC. Оказалось, что $\angle ABD = 10°$ и $\angle DBC = 92°$. Найдите $\angle BCA$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 31

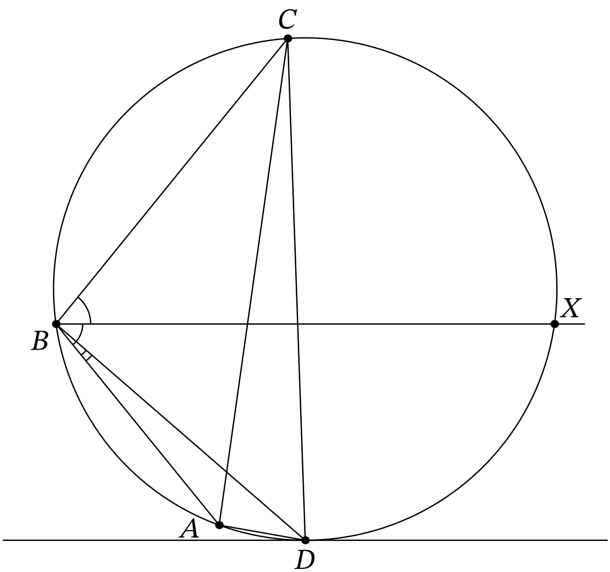

Рис. 1: К решению задачи 10.7

Решение. Пусть X — точка пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью. Обозначим $\angle DAX$ за α, тогда $\angle CBX = \angle ABX = 10° + \alpha$. Тогда $\angle DBC = 2\alpha + 10° = 92°$.

Отсюда находим, что $\alpha = 41°$. Поскольку касательная в D параллельна BX, то D является серединой дуги BX, и тогда

$$\angle BCA = \angle BCD - \angle ACD = \angle DBX - \angle ABD = 41° - 10° = 31°.$$

□

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 7.2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что касательная в точке D к описанной окружности параллельна биссектрисе угла ABC. Оказалось, что $\angle ABD = 12°$ и $\angle DBC = 94°$. Найдите $\angle BCA$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 29

Задача 7.3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что касательная в точке D к описанной окружности параллельна биссектрисе угла ABC. Оказалось, что $\angle ABD = 13^\circ$ и $\angle DBC = 93^\circ$. Найдите $\angle BCA$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 27

Задача 7.4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что касательная в точке D к описанной окружности параллельна биссектрисе угла ABC. Оказалось, что $\angle ABD = 12^\circ$ и $\angle DBC = 96^\circ$. Найдите $\angle BCA$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 30

Задача 8.1. В ряд стоят 20 ящиков, пронумерованные слева направо числами от 1 до 20. В ящиках с нечётными номерами лежат по 45 шариков, а с чётными номерами — по 46. За одну операцию разрешается выбрать не крайний справа ящик, в котором нечётное количество шариков, и переложить один шарик из него в соседний справа ящик. Если никакую операцию сделать невозможно, процесс заканчивается.

(а) (3 балла) Через какое минимальное количество операций мог закончиться процесс?

(б) (4 балла) Через какое максимальное количество операций мог закончиться процесс?

Ответ:

а) 10
б) 100.

Решение. Будем называть операцией типа i перекладывание шарика из ящика с номером i в ящик с номером $i+1$.

Рассмотрим суммарное количество шариков в первых i ящиках. Эта величина уменьшается на 1 при операциях типа i и не меняется при всех остальных операциях. При этом в конце процесса эта величина чётная, та как в каждом ящике будет по чётному числу шариков. Следовательно, чётность число операций типа i совпадает с чётностью суммарного количества шариков в первых i ящиках в начале процесса. Следовательно, количество операций типа i нечётно для чисел вида $i = 4k+1$ и $i = 4k+2$ и нечётно для чисел вида $i = 4k+3$ и $i = 4k$.

а) *Оценка.* Так как от 1 до 19 есть десять чисел вида $i = 4k+1$ и $i = 4k+2$, то для десяти i количество операций типа i нечётно, и, следовательно, не меньше одного. Отсюда суммарное число операций не меньше 10.

Пример. Проведём операции следующих типов: 1,2,5,6,9,10,13,14,17,18. Нетрудно видеть, что после них в каждом ящике будет нечётное число шариков.

б) Заметим, что после операции типа $i+1$ в ящике $i+1$ остаётся чётное количество шариков. Поэтому между любыми двумя операциями типа $i+1$ должна быть хотя бы одна операция типа i. Следовательно, операций типа $i+1$ максимум на 1 больше, чем операций типа i.

Оценка. Оценим сверху количество операций каждого типа. Операций типа 1 ровно одна. Операций типа 2 нечётно и максимум на 1 больше операций типа 1, откуда операций типа 2 тоже 1. Операций типа 3 чётно и максимум на 1 больше операций типа 2, откуда операций типа 3 не больше двух. Операций типа 4 тоже чётно и максимум на 1 больше операций типа 3, откуда операций типа 4 не больше двух. Продолжая таким образом, получаем, что операций типов $2i-1$ и $2i$ не больше, чем i. Просуммируем все полученные оценки: всего операций не больше $1+1+2+2+\ldots+9+9+10=100$.

□

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 3 балла.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 4 балла.

Задача 8.2. В ряд стоят 24 ящика, пронумерованные слева направо числами от 1 до 24. В ящиках с нечётными номерами лежат по 45 шариков, а с чётными номерами — по 46. За одну операцию разрешается выбрать не крайний справа ящик, в котором нечётное количество шариков, и переложить один шарик из него в соседний справа ящик. Если никакую операцию сделать невозможно, процесс заканчивается.

(а) (3 балла) Через какое минимальное количество операций мог закончиться процесс?

(б) (4 балла) Через какое максимальное количество операций мог закончиться процесс?

Ответ:

а) 12
б) 144.

Задача 8.3. В ряд стоят 28 ящиков, пронумерованные слева направо числами от 1 до 28. В ящиках с нечётными номерами лежат по 45 шариков, а с чётными номерами — по 46. За одну операцию разрешается выбрать не крайний справа ящик, в котором нечётное количество шариков, и переложить один шарик из него в соседний справа ящик. Если никакую операцию сделать невозможно, процесс заканчивается.

(а) (3 балла) Через какое минимальное количество операций мог закончиться процесс?

(б) (4 балла) Через какое максимальное количество операций мог закончиться процесс?

Ответ:

а) 14
б) 196.

Задача 8.4. В ряд стоят 32 ящика, пронумерованные слева направо числами от 1 до 32. В ящиках с нечётными номерами лежат по 45 шариков, а с чётными номерами — по 46. За одну операцию разрешается выбрать не крайний справа ящик, в котором нечётное количество шариков, и переложить один шарик из него в соседний справа ящик. Если никакую операцию сделать невозможно, процесс заканчивается.

(а) **(3 балла)** Через какое минимальное количество операций мог закончиться процесс?

(б) **(4 балла)** Через какое максимальное количество операций мог закончиться процесс?

Ответ:

а) 16
б) 256.