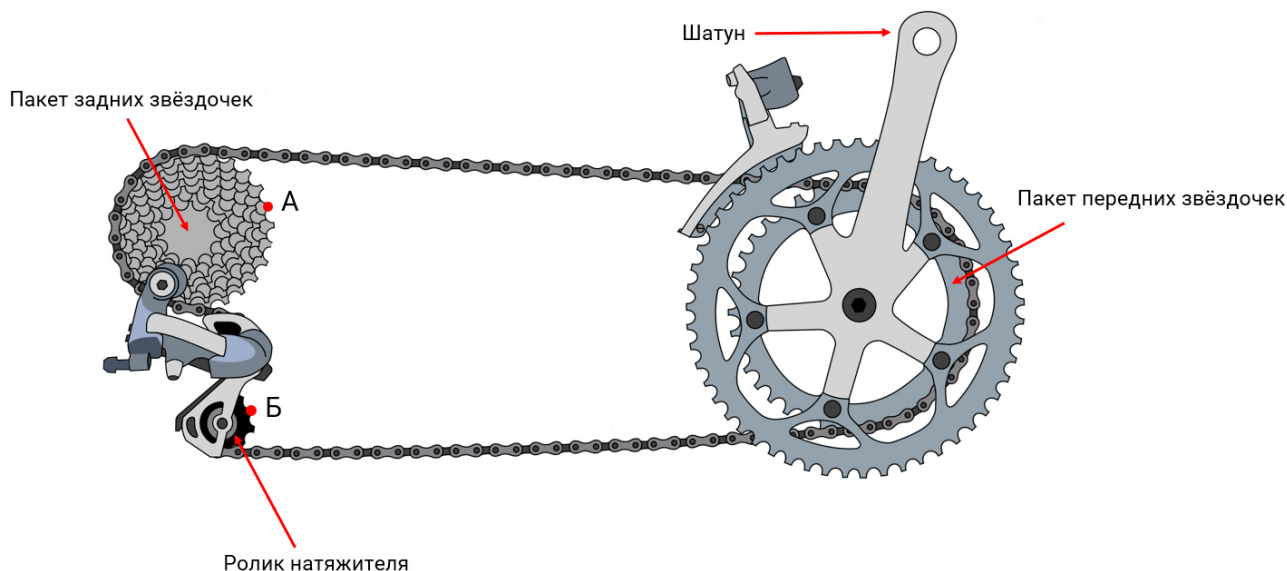


Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. На рисунке представлено устройство велосипедной трансмиссии. Шатун, к которому присоединяются педали, зафиксирован на пакете передних звёздочек и вращается вместе с ними относительно неподвижной оси. Одна звёздочка из пакета передних с помощью цепи соединена с одной из пакета задних. В свою очередь, пакет задних звёздочек вращается вместе с задним колесом как единое целое. Диаметр колеса $D = 29$ дюймов. Известно, что $1 \text{ дюйм} = 2.54 \text{ см}$.

Чтобы цепь не провисала, в трансмиссии имеется ролик натяжителя. Велосипедная цепь не проскальзывает относительно звёздочек и роликов натяжителя.



Известно, что для некоторой выбранной передачи диаметр используемой передней звёздочки в $x = 1.5$ раза больше диаметра задней, а диаметр используемой задней звёздочки в $y = 4$ раза больше диаметра ролика натяжителя.

Заполните пропуски.

Чтобы двигаться на велосипеде с максимальной скоростью, в передней кассете нужно выбрать ... звёздочку, а в задней кассете — ... звёздочку.

Ответ:

- самую большую
- среднюю
- самую маленькую
- любую

Критерий оценивания: за каждый верный ответ — 1 балл. Всего 2 балла

Задание 2. Во сколько раз скорость v_B точки Б больше скорости v_A точки А (на поверхности задней звёздочки)? Скорости измеряются относительно велосипеда. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 1.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 3. С какой частотой n_2 вращается ролик натяжителя, если передняя звёздочка вращается с частотой $n_1 = 60$ оборотов в минуту? Ответ выразите в об/мин, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [359; 361]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Задание 4. Человек крутит педали с частотой $n_3 = 40$ оборотов в минуту. С какой скоростью относительно земли движется при этом велосипед? Считайте, что велосипед движется без проскальзывания относительно земли. Примите $\pi = 3.14$. Ответ выразите в м/с, округлите до десятых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [2.2; 2.4]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 4 балла

Максимальный балл за задание — 11

Решение.

1) Для достижения велосипедом максимальной скорости необходимо, чтобы на один оборот педалей, прикрепленных к передней звёздочке, колесо, прикрепленное к задней звёздочке, делало как можно больше оборотов. Чем больше радиус звёздочки, прикрепленной к педалям, тем с большей скоростью будет двигаться велосипедная цепь, что приведёт к увеличению скорости вращения заднего пакета звёздочек. А чем меньше радиус звёздочки, выбран-

ной в заднем пакете, тем быстрее будет вращаться колесо при заданной скорости цепи. Следовательно, необходимо выбрать спереди самую большую звёздочку, сзади — самую маленькую.

2) Цепь нерастяжимая. Получаем, что у разных точек цепи скорости одинаковые. Цепь не проскальзывает относительно звёздочек и роликов натяжителя. Получаем, что скорости точек А и Б, которые регулярно соприкасаются с цепью, равны скоростям точек цепи. Следовательно, скорости точек и равны друг другу, т.е.:

$$\frac{v_B}{v_A} = 1.0.$$

3) По условию диаметр передней звёздочки в x раз больше диаметра задней, а диаметр используемой задней звёздочки в y раз больше диаметра ролика натяжителя. Следовательно, диаметр передней звёздочки в xy раз больше диаметра ролика натяжителя:

$$D_1 = xy \cdot D_2.$$

Частота вращения определяется выражением:

$$n = \frac{v}{\pi D},$$

где v — скорость поверхности звёздочки или ролика натяжителя, а D — её или его диаметр. Так как звёздочка и ролик натяжителя касаются одной и той же цепи, которая движется без проскальзывания, скорости их поверхностей одинаковы. Получаем:

$$v_1 = v_2,$$

$$\pi D_1 n_1 = \pi D_2 n_2.$$

Отсюда:

$$n_2 = \frac{D_1 n_1}{D_2} = \frac{xy \cdot D_2 n_1}{D_2} = xy \cdot n_1 = 1.5 \cdot 4 \cdot 60 = 360 \frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

4) Диаметр колеса в метрах:

$$D_K = D \cdot 0.0254 \frac{\text{м}}{\text{дюйм}}.$$

Частота вращения педалей в оборотах в секунду:

$$n_{3C} = \frac{n_3}{60}.$$

И она равна частоте вращения передней звёздочки:

$$n_{3C} = n_1.$$

Частота вращения колеса равна частоте вращения задней звёздочки:

$$n_K = n_4.$$

По условию диаметр передней звёздочки в x раз больше диаметра используемой задней звёздочки.

$$D_1 = x \cdot D_4.$$

Частота вращения определяется выражением:

$$n = \frac{v}{2\pi R},$$

где v — скорость поверхности звёздочки, а D — её диаметр. Так как передняя и задняя звёздочки касаются одной и той же цепи, которая движется без проскальзывания, скорости их поверхностей одинаковы. Получаем:

$$v_1 = v_4,$$

$$\pi D_1 n_1 = \pi D_4 n_4.$$

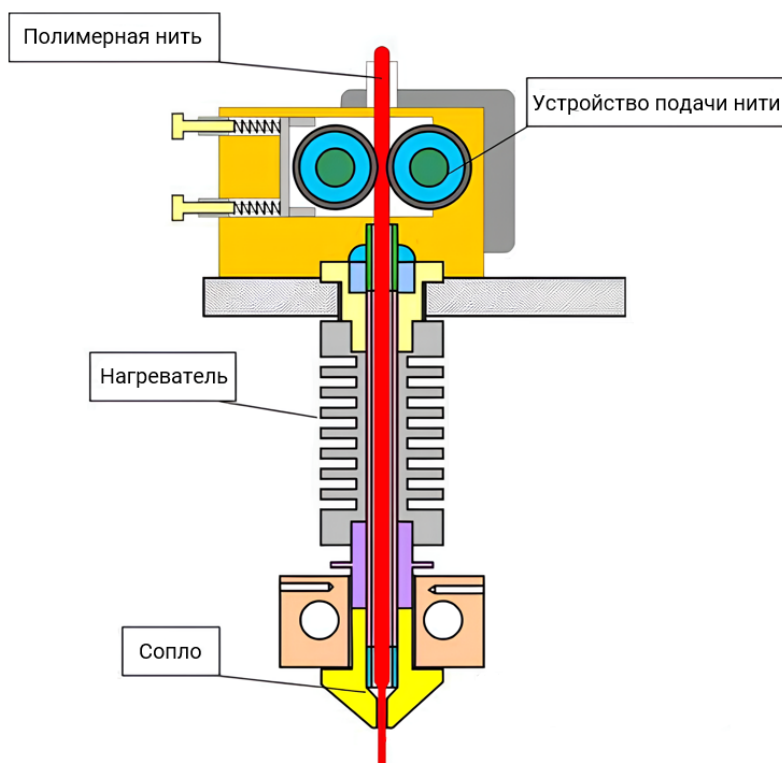
Отсюда частота вращения колеса:

$$n_K = n_4 = \frac{D_1 n_1}{D_4} = \frac{x \cdot D_4 n_1}{D_4} = x \cdot n_1 = x \cdot n_{3C}.$$

Скорость велосипеда:

$$v = n_K \cdot \pi \cdot D_K = x \cdot n_{3C} \cdot \pi \cdot D_K = x \cdot \frac{n_3}{60} \cdot \pi \cdot D \cdot 0.0254 = 1.5 \cdot \frac{40}{60} \cdot 3.14 \cdot 29 \cdot 0.0254 = 2.3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задание 5. Печатающая головка 3D-принтера устроена следующим образом: специальный полимерный (пластиковый) шнур при помощи двух вращающихся валиков подаётся в нагреватель. В нём шнур разогревается до температуры, при которой из твёрдого он становится вязким и пластичным. После чего полимер выдавливается через металлическое сопло на рабочий стол принтера, где, застывая, опять отвердевает.



Определите массу единицы длины шнура (погонную плотность), если известно, что кусок шнура длиной $L = 210$ м имеет массу $m = 1000$ г. Ответ выразите в г/м, округлите до сотых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [4.75; 4.77]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 6. На нагревательный элемент подаётся напряжение $U = 24$ В. Какая сила тока протекает через нагреватель, если его мощность $P = 40$ Вт? Ответ выразите в амперах, округлите до сотых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [1.66; 1.68]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 7. С какой скоростью выдавливается полимерный шнур из сопла, если в нагреватель он подаётся со скоростью $v = 10$ мм/с? Диаметр шнура $D = 1.75$ мм, а диаметр сопла d из которого выдавливается нагретый полимер, равен 0.4 мм. Можно считать, что плотность материала при нагреве не изменяется. Ответ выразите в мм/с, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [190; 192]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Задание 8. Чему равен КПД нагревательного элемента, если он нагревает полимерную нить от начальной температуры 20°C до температуры 380°C за то время, пока нить доходит до сопла через нагреватель? Внутри нагревателя пластик только разогревается и становится пластичным, процесс плавления (перехода в жидкое агрегатное состояние) не происходит. Удельная теплоёмкость полимерной нити 1.4 Дж/(г $\cdot$ $^\circ\text{C}$). Остальные данные можно взять из предыдущих вопросов. Ответ выразите в процентах, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [58; 62]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

5) Чтобы определить массу единицы длины шнура, нужно всю массу шнура m разделить на его длину L . Таким образом, получаем формулу:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{1000 \text{ г}}{210 \text{ м}} \approx 4.76 \frac{\text{г}}{\text{м}}.$$

6) Мощность тока вычисляется по формуле: $P = UI$. Из этой формулы можно выразить силу тока:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{40}{24} \approx 1.67 \text{ А}.$$

7) Так как плотность материала и его масса при нагреве не изменяются, неизменным остаётся объём пластика, который в единицу времени проходит через нагреватель. Выразим этот объём двумя способами. Сперва объём шнура, который подаётся в нагреватель:

$$V_1 = S_1 L_1.$$

Здесь $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения шнура; $L_1 = \theta \tau$ — длина шнура, который подаётся в нагреватель за время t . Тогда

$$V_1 = \pi \frac{D^2}{4} \theta \tau.$$

Теперь выразим объём нагретого шнура, который выходит из нагревателя:

$$V_2 = S_2 L_2.$$

Здесь $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения сопла, из которого выходит шнур; $L_2 = u \tau$ — длина шнура, который вышел из сопла за время t . Тогда:

$$V_2 = \pi \frac{d^2}{4} u \tau.$$

Приравняем объёмы:

$$\pi \frac{D^2}{4} \theta \tau = \pi \frac{d^2}{4} u \tau.$$

Сократив время и другие общие множители, выразим скорость выдавливания нагретого шнура:

$$u = \theta \frac{D^2}{d^2} = 10 \frac{1.75^2}{0.4^2} \approx 191 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$$

8) КПД любого устройства вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}}.$$

Где $A_{\text{пол}}$ — полезная работа, т.е. работа, ради которой создано устройство. В нашем случае нагреватель служит для нагрева нити до температуры плавления. Поэтому

$$A_{\text{пол}} = cm(t_{\text{пл}} - t) = c\mu v \tau (t_{\text{пл}} - t),$$

где $m = \mu v \tau$ — масса пластика, который подаётся в нагреватель за время τ . Теперь $A_{\text{зат}}$ — затраченная работа, т.е. энергия, которая была передана устройству во время его работы. В нашем случае это работа тока:

$$A_{\text{зат}} = P \tau.$$

Подставим всё в формулу КПД:

$$\eta = \frac{c\mu v \tau (t_{\text{пл}} - t)}{P \tau} = \frac{c\mu v (t_{\text{пл}} - t)}{P} = \frac{1.4 \cdot 4.76 \cdot 0.01 \cdot (380 - 20)}{40} \cdot 100 \% \approx 60 \%.$$

Задание 9. Неугомонные дракончики Вжих и Пых решили покататься на ватрушках по снежным горкам. И всё бы было огонь, если бы их другу Вико не задали в этот день лабораторную работу по изучению силы трения. Первым делом Вико взвесил всех участников «покатушек». Выяснилось, что масса Вжиха равна $M_1 = 30$ кг, а вот Пых поднабрал и весы показали, что его масса $M_2 = 45$ кг. Также выяснилось, что их ватрушки одинаковые и имеют массу $m = 2$ кг каждая. Во втором эксперименте было установлено, что для перемещения пустой ватрушки по горизонтальной части горки к ней необходимо прикладывать горизонтальную силу F не менее 4.1 Н. Считайте, что коэффициент трения ватрушки о всю поверхность горки является постоянным, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Помогите Вико правильно ответить на вопросы и получить пятёрку.

Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить, чтобы сдвинуть ватрушку с сидящим на ней Пыхом, если всё происходит на горизонтальном участке горки? Ответ выразите в ньютонах, округлите до десятых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [96.3; 96.5]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 10. Чему равен коэффициент трения ватрушки о снег? Ответ округлите до сотых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [0.20; 0.22]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 11. Вжих и Пых решили провести парочку мини-соревнований, договорившись, что помогать крыльями, лапами, дышать огнём и т.д. категорически запрещено. По условиям первого соревнования, названного «Кто дальше?», они разгоняются до одинаковой скорости $v = 5$ м/с, запрыгивают на ватрушки и скользят на них, пока не остановятся. Соревнование проводится на горизонтальном участке. Во сколько раз путь, пройденный до остановки Пыхом, будет больше пути, пройденного Вжихом? Ответ округлите до сотых.

Ответ: 1.00

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 12. Во втором соревновании «Кто быстрее?» оба участника стартуют на ватрушках с вершины крутой горки. Начальная скорость должна быть равна нулю. Во сколько раз быстрее Пых спустится с горки по сравнению с Вжихом? Упрощённо считайте горку прямой. Длина горки $L = 180$ м, горка наклонена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 1.00

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 13. Когда участникам весёлых «покатушек» пришлось затаскивать ватрушки на горку, возник спор: зависит ли сила, которую необходимо прикладывать к ватрушке для её перемещения, от угла α , под которым натянут трос?



Проведя серию экспериментов, удалось выяснить, что сила зависит от угла. Был определён угол наклона троса к горизонту, оптимальный для того, чтобы тянуть пустую ватрушку по горизонтальному участку горки, прикладывая наименьшую силу. Чему оказался равен этот угол? Ответ выразите в градусах, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [11; 13]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 9

Решение.

9) Запишем второй закон Ньютона для ситуации, когда мы двигаем пустой тубинг горизонтальной силой F_0 :

проекция на горизонтальную ось: $F_0 - F_{\text{тр}} = ma$;

проекция на вертикальную ось: $N - mg = 0$.

В условии сказано, что для движения сила должна быть не менее 4.1 Н. В случае минимальной силы ускорение практически равно 0, при этом сила трения равна максимально возможному значению — силе трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Получаем, что:

$$F_0 = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \quad (1)$$

Для тубинга с сидящим на нём Пыхом уравнения аналогичные, только масса — это масса Пыха с тубингом, $M_2 + m$:

$$F = \mu(M_2 + m)g. \quad (2)$$

Из 1 и 2 следует, что $\frac{F}{F_0} = \frac{(M_2 + m)}{m}$. Получаем, что искомая сила равна $F = \frac{4.1 \cdot (45 + 2)}{2} = 96.4$ Н.

10) Из соотношения (1) предыдущего пункта найдём коэффициент трения:

$$\mu = \frac{F_0}{mg} = \frac{4.1}{2 \cdot 10} = 0.21.$$

11) Для горизонтального участка поверхности второй закон Ньютона принимает вид:

проекция на горизонтальную ось: $-F_{\text{тр}} = Ma$;

проекция на вертикальную ось: $N - Mg = 0$,

где M — масса тубинга с дракончиком. При этом, пока тело движется, $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Находим ускорение: $a = -\frac{\mu N}{M} = -\frac{\mu Mg}{M} = -\mu g$ — оно постоянно и не зависит от массы.

В случае постоянного ускорения путь, пройденный телом до остановки, определяется начальной скоростью и ускорением:

$$S = \frac{(0 - v^2)}{2a} = \frac{v^2}{(2\mu g)}.$$

Получается, что путь, пройденный до остановки Вжихом и Пыхом, не зависит от их массы. Начальные скорости и коэффициенты трения одинаковы, следовательно, пути тоже будут одинаковы, поэтому ответом будет 1.00.

12) Запишем второй закон Ньютона для движения с горки:

проекция на ось вдоль горки: $Ma = Mg \sin(\alpha) - F_{\text{тр}}$;

проекция на ось перпендикулярно горке: $N - Mg \cos(\alpha) = 0$,

где M — масса тубинга с дракончиком.

Пока тело движется, $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Находим ускорение:

$$a = g \sin(\alpha) - \frac{\mu N}{M} = g \sin(\alpha) - \mu g \cos(\alpha).$$

Заметим, что ускорение не зависит от массы, т.е. оно одинаково для Вжиха и Пыха.

Расстояние, пройденное телом при равноускоренном движении без начальной скорости, равно $L = \frac{a \cdot t^2}{2}$.

Получаем, что время скатывания $t^2 = \frac{2L}{a}$ не зависит от массы, т.е. одинаково для Вжиха и Пыха, поэтому в ответ пойдёт число 1.00.

13) Для силы, направленной под углом α , и горизонтального участка поверхности второй закон Ньютона для тубинга принимает вид:

проекция на горизонтальную ось: $F \cos(\alpha) - F_{\text{тр}} = ma$;

проекция на вертикальную ось: $N + F \sin(\alpha) - mg = 0$.

Пока тело движется, $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Преобразуем систему:

$$F \cos(\alpha) - \mu(mg - F \sin(\alpha)) = ma.$$

Ускорение должно быть неотрицательным:

$$F(\cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha)) - \mu mg = ma \geq 0$$

или

$$F(\cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha)) \geq \mu mg.$$

Чтобы сила F была минимальной, выражение в скобках $(\cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha))$ должно быть максимальным.

Введём дополнительный параметр $\tan(\beta) = \mu$, тогда

$$(\cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha)) = \frac{(\cos(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\beta) \sin(\alpha))}{\cos(\beta)} = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos(\beta)}.$$

Это выражение принимает максимальное значение (косинус равен 1) при $\alpha = \beta$. Оптимальный угол для движения равен $\alpha = \beta = \arctan(\mu) \approx 12$ градусов.