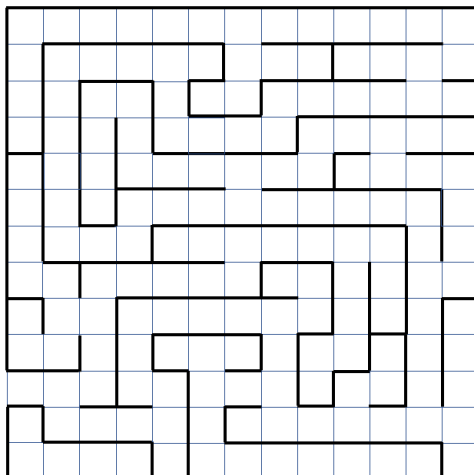


Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. Для соревнований в номинациях «лабиринт», «гонки преследования» и «следование по линии» семиклассник сконструировал квадратного робота со стороной 10 см, который может двигаться в трёх скоростных режимах А — со скоростью 3 м/мин, Б — со скоростью 4 м/мин, В — со скоростью 5 м/мин.

Какое наилучшее время робот способен показать в «лабиринте» размерами 130×130 см?



Временем на повороты пренебречь. Робот не пересекает внешние и внутренние границы лабиринта. Две стороны робота при движении всегда остаются параллельны прилегающим к ним сторонам лабиринта, вектор скорости параллелен двум сторонам робота и перпендикулярен двум оставшимся сторонам. Временем прохождения лабиринта считается промежуток времени, прошедший от пересечения геометрическим центром робота линии входа до пересечения линии выхода лабиринта. Ответ выразите в секундах, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [67; 69]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 2. В «гонках преследования» робот использовал скоростной режим Б (4 м/мин). Если бы он проходил в минуту на 0.5 м больше, то на тот же путь ему бы потребовалось на 1 минуту меньше. Сколько времени ехал робот? Ответ выразите в минутах, округлите до целых.

Ответ: 9

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 3. Какой путь он прошёл? Ответ выразите в метрах, округлите до целых.

Ответ: 36

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 4. На соревнованиях «следование по линии» робот половину пути проехал в скоростном режиме А (3 м/мин), а оставшуюся половину — в режиме Б (4 м/мин). Чему равна средняя скорость робота на всём пути? Ответ выразите в м/мин, округлите до десятых.

Ответ: 3.4

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 5. На соревнованиях «следование по линии» робот половину времени проехал в скоростном режиме А (3 м/мин), а оставшуюся половину — в режиме Б (4 м/мин). Чему равна средняя скорость робота на всём пути? Ответ выразите в м/мин, округлите до десятых.

Ответ: 3.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 6. На соревнованиях «следование по линии» робот половину пути проехал в скоростном режиме А (3 м/мин), половину оставшегося времени — в режиме Б (4 м/мин), а последний участок — в режиме В (5 м/мин). Чему равна средняя скорость робота на всём пути? Ответ выразите в м/мин, округлите до десятых.

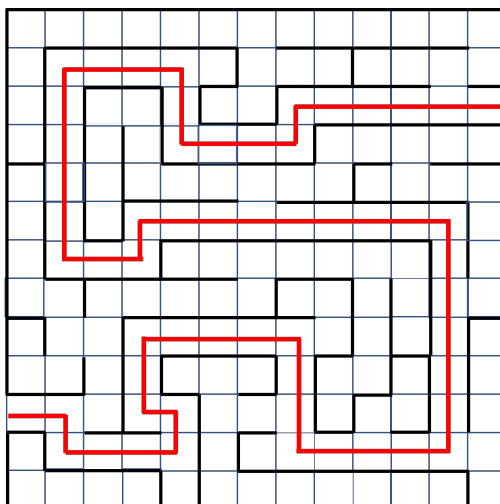
Ответ: 3.6

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 4 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

1) По условию разворот робота на 180 градусов невозможен, с учётом этого существует только один маршрут. Построим траекторию движения центра робота от въезда до выезда так, чтобы её длина была минимальной:



Длина траектории составляет 57 клеток. Боковая сторона лабиринта имеет длину 13 клеток или $a = 130$ см. Сторона одной клетки $130 \text{ см} : 13 = 10 \text{ см}$. Значит, путь центра робота равен $s = 57 \cdot 10 \text{ см} = 570 \text{ см}$. Чтобы показать наилучшее время (минимальное время в пути), роботу надо двигаться с наибольшей скоростью 5 м/мин (режим В). Время в пути:

$$t = \frac{s}{v},$$

$$t = \frac{5.7 \text{ м}}{5 \text{ м/мин}} = 1.14 \text{ мин} = 68.4 \text{ с} \approx 68 \text{ с}.$$

2) Чтобы найти путь, надо скорость умножить на время: $s = v \cdot t$. Значит, во сколько раз скорость больше, во столько раз время прохождения того же пути меньше. Составим пропорцию и решим её:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

$$\frac{4 \text{ м/мин}}{4.5 \text{ м/мин}} = \frac{t_1 - 1}{t_1},$$

$$4 \cdot t_1 = 4.5(t_1 - 1),$$

$$t_1 = 9 \text{ мин}.$$

3) Чтобы найти путь, надо скорость умножить на время:

$$s = v_1 \cdot t_1 = 4 \text{ м/мин} \cdot 9 \text{ мин} = 36 \text{ м}.$$

4) Составим выражение для средней скорости:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{\text{весь}}}{t_{\text{все}}} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\frac{s_1}{2v_1} + \frac{s_2}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 3 \text{ м/мин} \cdot 4 \text{ м/мин}}{3 \text{ м/мин} + 4 \text{ м/мин}} \approx 3.4 \text{ м/мин}.$$

5) Составим выражение для средней скорости:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{\text{весь}}}{t_{\text{все}}} = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 \cdot t + v_2 \cdot t}{t + t} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{3 \text{ м/мин} + 4 \text{ м/мин}}{2} = 3.5 \text{ м/мин.}$$

6) Чтобы найти среднюю скорость, надо весь путь разделить на всё время в пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{\text{весь}}}{t_{\text{всё}}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Составим выражение для средней скорости, используя связи времён и расстояний:

$$t_3 = t_2,$$

$$s_3 = v_3 \cdot t_3,$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot t_3,$$

$$s_1 = s_2 + s_3 = v_2 \cdot t_3 + v_3 \cdot t_3 = (v_2 + v_3) \cdot t_3,$$

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \left(\frac{v_2 + v_3}{v_1} \right) \cdot t_3,$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{\frac{2(v_2 + v_3) \cdot t_3}{\frac{(v_2 + v_3) \cdot t_3}{v_1} + 2t_3}}{v_1} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (4 + 5)}{2 \cdot 3 + 4 + 5} \frac{\text{м}}{\text{мин}} = 3.6 \text{ м/мин.}$$

Задание 7. Из пластмассы сделали уменьшенную в 3 раза по линейным размерам (длине, высоте, ширине) копию статуэтки.



И оригинал, и копия не имеют полостей внутри.

Чему равна плотность пластмассы, если масса копии в 100 раз меньше массы оригинала? Ответ выразите в кг/м^3 , округлите до целых. Плотность оригинальной статуэтки 7900 кг/м^3 .

Ответ: 2133

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 4 балла

Задание 8. Что оказывает на стол большее давление — оригинал статуэтки или копия?

Ответ:

- ✓ Оригинал
- Копия
- Одинаково

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 9. Во сколько раз? Ответ округлите до десятых. Если в предыдущем вопросе вы ответили, что давление одинаково, в ответ запишите 1.

Ответ: 11.1

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Задание 10. Что произойдёт со статуэтками, если их поместить в воду?

В этом задании используются не все варианты ответа из правого столбца. Неиспользованные варианты приведены в последней ячейке таблицы.

Ответ:

Оригинал	Утонет
Копия	Утонет
	Всплывёт на поверхность Будет плавать в толще воды

Критерий оценивания: за каждую верную пару — 1 балл. Всего 2 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

7) Когда все три измерения (длина, ширина, высота) уменьшаются в n раз, объём тела уменьшается в n^3 раз. Если $n = 3$, то $n^3 = 27$.

Чтобы найти массу, надо плотность умножить на объём: $m_0 = \rho_0 \cdot V_0$, $m_k = \rho_k \cdot V_k$.

Составим уравнение $\frac{m_0}{100} = m_k$ и решим его:

$$\frac{\rho_0 \cdot V_0}{100} = \rho_k \cdot \frac{V_0}{27},$$

$$\rho_k = 0.27\rho_0 = 0.27 \cdot 7900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 2133 \text{ кг/м}^3.$$

8) Когда все три измерения (длина, ширина, высота) уменьшаются в n раз, площадь опоры уменьшается в n^2 раз. Если $n = 3$, то $n^2 = 9$.

Давление твёрдого тела $p = \frac{F}{S}$. Сила давления равна весу тела: $p_0 = \frac{m_0 \cdot g}{S_0}$,

$$p_k = \frac{m_k \cdot g}{S_k} = \frac{\frac{m_0}{100} \cdot g}{\frac{S_0}{9}} = 0.09 \frac{m_0 \cdot g}{S_0} = 0.09 p_0 < p_0.$$

9)

$$\frac{p_0}{p_k} = \frac{1}{0.09} = \frac{100}{9} \approx 11.1.$$

10) Сравним плотности оригинала и копии статуэток с плотностью воды. Если плотность тела больше плотности воды, то тело утонет; если меньше, то всплывёт на поверхность; если плотности тела и воды одинаковые, то тело будет плавать в толще воды.

Если масса копии в 100 раз меньше массы оригинала, то $\rho_k = 2133 \text{ кг/м}^3 > 1000 \text{ кг/м}^3$, тело утонет.

Задание 11. Шар массой $m = 250$ г подвешен на пружине жёсткостью $k = 100$ Н/м. Плотность вещества, из которого изготовлен шар, 7.5 г/см^3 , плотность воды 1 г/см^3 , ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

Чему равно удлинение этой пружины при подвешивании к ней шара в воздухе? Плотностью воздуха пренебречь. Ответ выразите в миллиметрах, округлите до целых.

Ответ: 25

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Задание 12. При полном погружении в воду удлинение пружины уменьшилось на 8 мм. Имеется ли внутри шара полость?

Ответ:

- ✓ Да
- Нет
- Недостаточно данных

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Задание 13. Если в шаре есть полость, определите её объём. Ответ выразите в см^3 , округлите до целых. Если полости в шаре нет, в ответ запишите 0.

Ответ: 47

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 4 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

11) Сила упругости уравновешивает силу тяжести: $mg = k\Delta l$. Удлинение пружины:

$$\Delta l = \frac{mg}{k},$$

$$\Delta l = \frac{0.25 \text{ кг} \cdot 10 \text{ Н/кг}}{100 \text{ Н/кг}} = 0.025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

12) При полном погружении тела в воду вес уменьшается на величину силы Архимеда. Значит, сила Архимеда:

$$F_{\text{арх}} = k \cdot \Delta l = 100 \text{ Н/м} \cdot 0.008 \text{ м} = 0.8 \text{ Н}.$$

Объём вытесненной воды равен объёму шара:

$$V_{\text{ш}} = \frac{F_{\text{арх}}}{\rho_{\text{в}} \cdot g} = \frac{0.8 \text{ Н}}{1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг}} = 0.00008 \text{ м}^3 = 80 \text{ см}^3.$$

Объём вещества шара:

$$V_{\text{в}} = \frac{m_{\text{ш}}}{\rho_{\text{ш}}} = \frac{250 \text{ г}}{7.5 \text{ г/см}^3} \approx 33 \text{ см}^3.$$

Сравним объёмы шара и вещества шара: $80 \text{ см}^3 > 33 \text{ см}^3$. Значит, в шаре есть полость.

13) Объём полости:

$$V_{\text{п}} = V_{\text{ш}} - V_{\text{в}} = 80 \text{ см}^3 - 33 \text{ см}^3 = 47 \text{ см}^3.$$