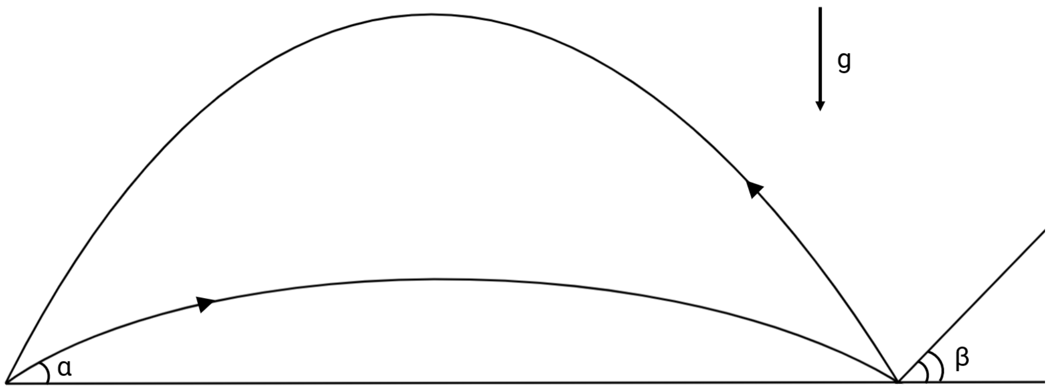
Максимальное количество баллов за олимпиаду — 32

Задание 1. Из игрушечной пушки выстрелили маленьким тяжёлым шариком так, что он вылетел из ствола со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пролетев некоторое расстояние S, шарик абсолютно упруго ударился о плоскость, наклонённую к горизонту под углом β. Отскочив от плоскости и пролетев по траектории, не совпадающей с траекторией полёта из пушки до удара о плоскость, шарик упал рядом с местом выстрела. Точки выстрела и соударения с плоскостью находятся на одной высоте. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Угол выстрела α монотонно увеличивается от 15° до 75°. Установите соответствие между параметрами и характером их изменения.

В этом задании используются не все варианты ответа из правого столбца. Неиспользованные варианты приведены в последней ячейке таблицы.

Ответ:

Время полёта шарика до удара о плоскость	Монотонно увеличивается
Максимальная высота траектории при полёте от места выстрела до удара о плоскость	Монотонно увеличивается
Расстояние от точки выстрела до места удара о плоскость	Сначала увеличивается, затем уменьшается
	Монотонно уменьшается Сначала уменьшается, затем увеличивается

Критерий оценивания: за каждую верную пару — 1 балл. Всего 3 балла

Задание 2. Угол выстрела $\alpha = 40°$. Под каким углом к горизонту подлетит шарик к месту выстрела после отскока от плоскости? Ответ выразите в градусах, округлите до целых.

Ответ: 50

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Задание 3. Угол выстрела $\alpha = 40°$. Под каким углом β к горизонту должна быть расположена наклонная плоскость, чтобы после отскока шарик прилетел к месту выстрела? Запишите значение острого угла. Ответ выразите в градусах, округлите до целых.

Ответ: 45

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 4. Скорость v_0, с которой вылетает шарик из пушки, составляет 10 м/с. Определите максимальное расстояние по горизонтали, которое может пролететь при такой скорости шарик. Ответ выразите в метрах, округлите до целых.

Ответ: 10

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 5. Скорость, с которой вылетает шарик из пушки, $v_0 = 10$ м/с, угол выстрела $\alpha = 30°$. Определите расстояние между вершинами парабол, являющихся траекториями шарика при движении от пушки к плоскости и обратно. Ответ выразите в метрах, округлите до десятых

Ответ: засчитывается в диапазоне [2.4; 2.6]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

1) При увеличении угла вертикальная проекция скорости $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$ монотонно увеличивается. Время движения при этом определяется формулой

$$t = \frac{2v_y}{g}$$

и тоже монотонно возрастает.

Можно воспользоваться известной формулой для расстояния, которое пролетает тело, брошенное под углом к горизонту:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

С учётом того, что $\sin 2\alpha$ увеличивается до 1 при увеличении угла до значения $\alpha = 45°$, а затем уменьшается, расстояние также сначала увеличивается, достигая максимального значения при $\alpha = 45°$, затем уменьшается.

Максимальная высота траектории определяется значением вертикальной проекции скорости $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$ и может быть определена по формуле:

$$h = \frac{v_y^2}{2g}.$$

С увеличением угла v_y также увеличивается, а вместе с ним монотонно увеличивается высота траектории.

2) Расстояние, которое пролетает тело, брошенное под углом к горизонту, определяется формулой:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

В интервале углов от $0°$ до $90°$ $\sin 2\alpha$ дважды принимает одинаковые значения при углах, сумма которых равна $90°$, симметрично расположенных по отношению к $\alpha = 45°$. Другими словами, одинаковые расстояния тело пролетает при значениях углов и $90° - \alpha$. При $\alpha = 40°$ значение угла для обратной траектории составляет $90° - \alpha = 50°$.

3) Чтобы после удара о наклонную плоскость двигавшийся под углом к горизонту шарик отскочил от плоскости под углом $90° - \alpha$, перпендикуляр к плоскости (и сама плоскость) должны быть наклонены к горизонту под углом $\beta = 45°$.

4) Расстояние, которое пролетает тело, брошенное под углом к горизонту, определяется формулой:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальное значение l достигается при $\alpha = 45°$ и равно:

$$l_{max} = \frac{v_0^2}{g} = 10 \text{ м}.$$

5) Максимальная высота траектории определяется значением вертикальной проекции скорости $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$ и может быть определена по формуле:

$$h = \frac{v_y^2}{2g}.$$

Для первой траектории:

$$h_1 = \frac{(v_0 \cdot \sin\alpha)^2}{2g},$$

для второй:

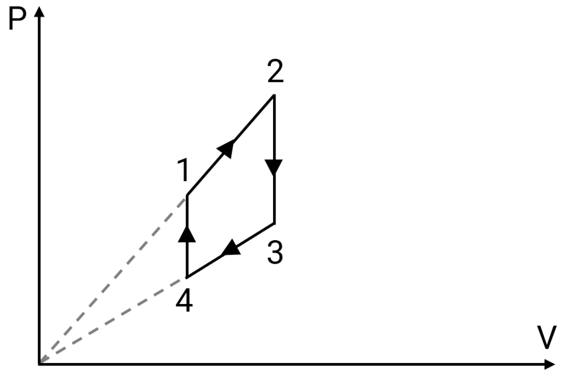
$$h_2 = \frac{(v_0 \cdot \sin(90° - \alpha))^2}{2g} = \frac{(v_0 \cdot \cos\alpha)^2}{2g}.$$

Расстояние между вершинами парабол при этом:

$$\Delta h = \left| \frac{(v_0 \cdot \cos\alpha)^2}{2g} - \frac{(v_0 \cdot \sin\alpha)^2}{2g} \right| = \frac{v_0^2 \cdot |\cos 2\alpha|}{2g}.$$

При значениях начальной скорости и угла выстрела, заданных в условии, $\Delta h = 2.5$ м.

Задание 6. Один моль одноатомного идеального газа участвует в циклическом процессе 1–2–3–4–1.



Охарактеризуйте процессы для отдельных участков этого цикла.

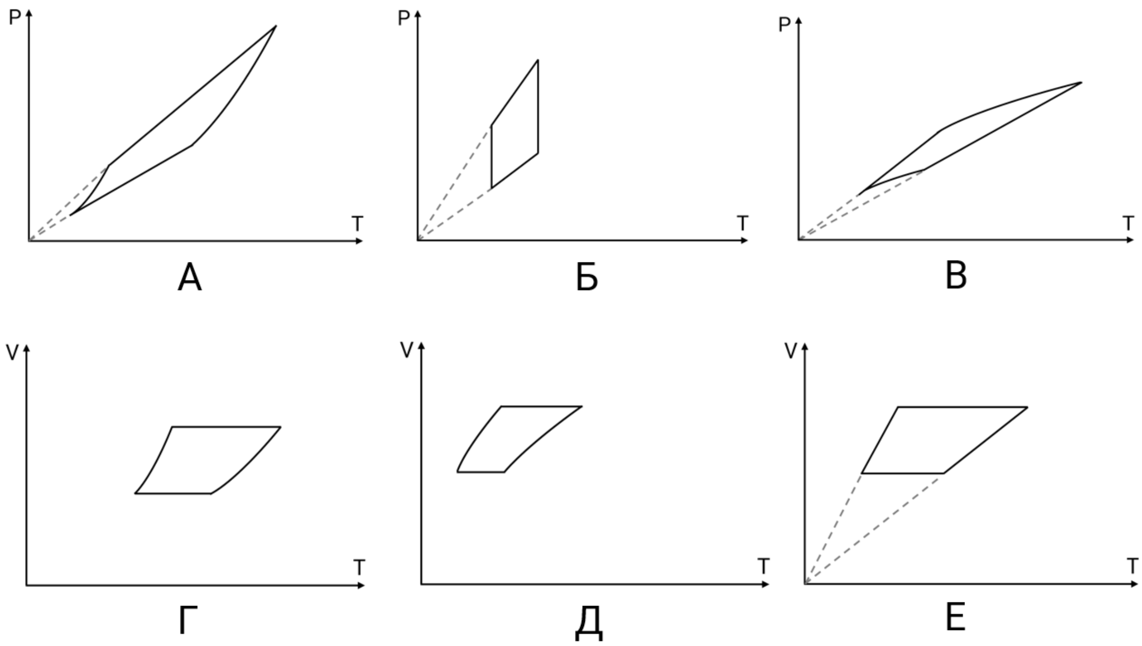
В этом задании используются не все варианты ответа из правого столбца. Неиспользованные варианты приведены в последней ячейке таблицы.

Ответ:

1–2	Не относится к изопроцессам
2–3	Изохорный
3–4	Не относится к изопроцессам
4–1	Изохорный
	Изотермический Изобарный Адиабатический

Критерий оценивания: за каждую верную пару — 1 балл. Всего 4 балла

Задание 7. Выберите диаграммы в координатах $P(T)$ и $V(T)$, соответствующие процессу 1–2–3–4–1 в координатах $P(V)$. Точки 1, 2, 3 и 4 не указаны на этих диаграммах намеренно.



Ответ:

- А
- Б
- ✓ В
- Г
- ✓ Д
- Е

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 8. Пусть максимальный объём в процессе в 2 раза больше минимального, а отношение давлений в точках 1 и 4 равно 3. Определите отношение максимальной температуры, выраженной в градусах Кельвина, в данном процессе к минимальной. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 12.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 9. Пусть давление в точке 3 в 2 раза больше давления в точке 4, а температуры в точках 1 в 3 равны. Во сколько раз давление в точке 2 больше давления в точке 3? Ответ округлите до десятых.

Ответ: 4.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 10. Давления в точках 2 и 1 относятся как 2 : 1. Известно, что на участке 4–1 к газу было подведено 25 Дж теплоты. Какое количество теплоты отвели от газа на участке 2–3? Ответ выразите в джоулях, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [99; 101]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

6) Для участков 2–3 и 4–1 ответ очевиден — объём газа остаётся постоянным, процесс изохорный. На участках 1–2 и 3–4 имеет место прямо пропорциональная зависимость $P(V)$. Такая зависимость не проявляется ни в одном из изопроцессов.

7) Для участков 1–2 и 3–4 давление и объём газа связаны соотношением $P = kV$, где k — коэффициент пропорциональности, различный для этих участков. Из уравнения состояния $PV = RT$ можно получить соотношения для $V(T)$:

$$kV^2 = RT \Rightarrow V = \sqrt{\frac{RT}{k}}$$

и для $P(T)$:

$$\frac{P^2}{k} = RT \Rightarrow P = \sqrt{kRT}.$$

В обоих случаях параметры P, V оказываются прямо пропорциональными T. С учётом этого выбираем правильные рисунки В и Д.

8) Согласно уравнению состояния температура газа пропорциональна произведению PV. Отношение максимального и минимального значений температур будет соответствовать отношению произведений PV в точках 2 и 4:

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{P_2V_2}{P_4V_4} = \frac{nP_1nV_4}{\frac{P_1}{k}V_4} = n^2k = 12,$$

где $n = 2$, $k = 3$.

9) Как и в предыдущих пунктах, равенство температур в точках 1 и 3 соответствует равенству произведения PV в этих точках:

$$P_1V_1 = P_3V_3. \tag{1}$$

По условию $P_3 = qP_4$, тогда из пропорциональности P и V на участке 3–4 справедливо аналогичное соотношение для объёмов:

$$V_3 = qV_4 = qV_1. \tag{2}$$

Подставляя выражения для V_3 и P_3 в (1), получаем:

$$P_1V_1 = P_3V_3 = qP_4 \cdot qV_1,$$

$$\frac{P_1}{P_4} = q^2. \tag{3}$$

Но отношение $\frac{P_1}{P_4}$ равно искомому отношению $\frac{P_2}{P_3}$. Следовательно, $\frac{P_2}{P_3} = q^2 = 4$.

10) Из пропорциональности давления и объёма на участках 1–2 и 3–4 следует, что отношение объёмов равно отношению давлений:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} = \frac{P_2}{P_1} = s.$$

Ранее было показано, что отношение температур в каких-либо точках цикла равно отношению произведений PV в этих точках. Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = s^2 \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot s^2,$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{P_3V_3}{P_4V_4} = s^2 \Rightarrow T_3 = T_4 \cdot s^2.$$

Количество теплоты, подведённой к газу в изохорном процессе на участке 4–1:

$$Q = \frac{3}{2}R(T_1 - T_4).$$

Здесь $\frac{3}{2}R$ — молярная теплоёмкость одноатомного идеального газа при постоянном объёме. Тогда количество теплоты, отведённой на участке 2–3,

$$Q_{23} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_3) = \frac{3}{2}R(T_1 - T_4) \cdot s^2 = Q \cdot s^2 = 100 \text{ Дж}.$$

Задание 11. На непроводящей спице на расстоянии l друг от друга закреплены два положительных точечных заряда величиной $q_1 = 4q$ и $q_2 = q$. Между ними на спице располагается маленькая бусинка, также заряженная положительным зарядом q. Бусинка может перемещаться вдоль спицы без трения.

Пусть $l = 30$ см. Определите расстояние от бусинки до заряда q_2, на котором она будет находиться в положении устойчивого равновесия. Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.

Ответ: 10.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 12. В начальный момент времени бусинку удерживают посередине между зарядами. Затем бусинку освобождают. Как меняется модуль ускорения бусинки в процессе её последующего движения от начального положения до точки максимального сближения с зарядом q_2?

Ответ:

- Монотонно уменьшается
- Монотонно увеличивается
- Сначала увеличивается, затем уменьшается
- ✓ Сначала уменьшается, затем увеличивается

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 13. Пусть $l = 30$ см. В начальный момент времени бусинку удерживают посередине между зарядами. Бусинку освобождают. На какое минимальное расстояние бусинка приблизится к заряду q_2 в процессе последующих колебаний? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.

Ответ: 6.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 14. На какое максимальное расстояние от заряда q_2 будет удаляться бусинка в процессе последующих колебаний? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.

Ответ: 15.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Задание 15. На каком расстоянии от заряда q_2 бусинка будет иметь максимальную скорость в процессе последующих колебаний? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.

Ответ: 10.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

11) Пусть x — расстояние от точки равновесия до заряда q_2, $l - x$ — расстояние от этой точки до заряда q_1. Силы, действующие в этой точке на заряд q со стороны зарядов q_1 и q_2, равны:

$$\frac{kqq_2}{x^2} = \frac{kqq_1}{(l-x)^2}.$$

Отсюда:

$$\frac{l-x}{x} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} = \sqrt{N},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{N}+1} = 10\,\text{см}.$$

12) Первоначально заряд q находится посередине отрезка, а точка равновесия —- ближе к заряду q_2, чем середина. Чем дальше от точки равновесия, тем больше отличие в силах, действующих со стороны зарядов q_1 и q_2 на заряд q.

Результирующая сила и ускорение минимальны (равны нулю) в точке равновесия и увеличиваются по модулю по мере удаления от этой точки. Поэтому в процессе движения от середины отрезка до точки максимального сближения с q_2 модуль ускорения сначала уменьшается до нуля, затем увеличивается.

13) Значения потенциальной энергии системы заряда q в поле зарядов q_1 и q_2 в точке, откуда он начинает движение, и в точке остановки на минимальном расстоянии y до q_2 одинаковые. Следовательно, равны и потенциалы электрического поля, которое заряды q_1 и q_2 создают в этих точках:

$$\frac{kq_1}{l/2} + \frac{kq_2}{l/2} = \frac{kq_1}{l-y} + \frac{kq_2}{y}.$$

После подстановки $q_1 = Nq$ и $q_2 = q$ и преобразований получаем квадратное уравнение:

$$2(N+1)^2 - (N+3)ly + l^2 = 0.$$

Уравнение имеет два корня: $y_1 = \frac{l}{2}$, соответствующий начальному положению, и $y_2 = \frac{l}{N+1}$, который и является ответом на вопрос задачи. При заданном в условии $N = 4$, $y_2 = 6$ см.

14) Мы уже получили ответ на этот вопрос в предыдущем пункте. В процессе движения по спице заряд останавливается в двух крайних положениях — исходном на середине отрезка и на расстоянии y_2 от q_2. Максимальному удалению от q_2 соответствует середина отрезка. Ответ $l_2 = 15$ см.

15) Максимальная скорость в процессе движения по спице будет в точке равновесия, так как при движении заряда от середины отрезка до этой точки скорость увеличивается, после прохождения этой точки — уменьшается. Поэтому ответ совпадает с ответом на вопрос о положении точки равновесия, максимальная скорость у заряда будет на расстоянии $\frac{l}{\sqrt{N}+1}$ от заряда q_2.