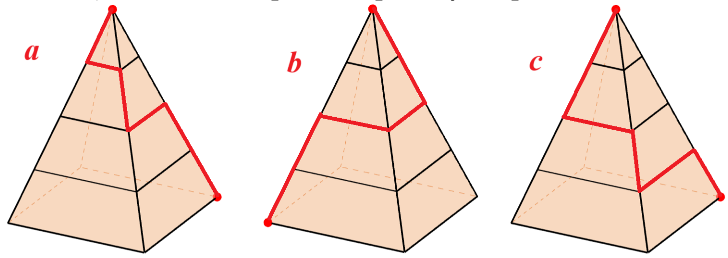
Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2024–2025 учебный год

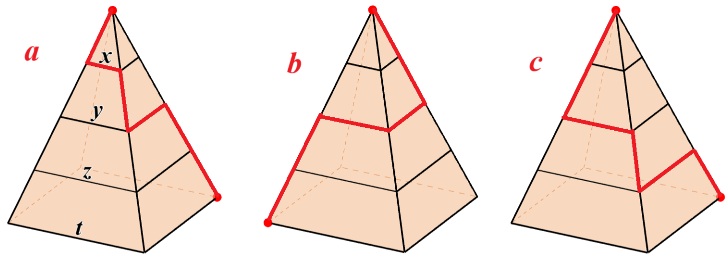
1. Боковые грани пирамиды — четыре равных равнобедренных треугольника. На этих гранях проведены отрезки, параллельные основанию, как показано на чертеже. Длины путей, отмеченные на чертежах красным, соответственно равны a, b и c. Выберите верное утверждение:



a) $c > b = a$,
b) $b = c > a$,
c) $a = b = c$,
d) $a < b < c$.

Ответ. d).

Решение. Обозначим длину горизонтальных участков через x, y, z и t (см. рисунок).



Боковые стороны равнобедренных треугольников, отсекаемых соответственно основаниями x, y, z и t от боковой грани, идут в порядке возрастания. Тогда из подобия этих треугольников следует, что $x < y < z < t$.

Пути состоят из нескольких горизонтальных участков и нескольких участков вдоль боковых рёбер пирамиды. В сумме длины участков вдоль боковых рёбер для каждого из приведённых путей равны длине бокового ребра (обозначим её через L). Тогда $a = L + x + y$, $b = L + 2y$, $c = L + y + z$.

Заметим, что

- $L + x + y < L + y + y = L + 2y$, откуда $a < b$;
- $L + 2y = L + y + y < L + y + z$, откуда $b < c$

Значит, $a < b < c$.

2. Действительные числа x и y таковы, что

$$\frac{9x}{y} = xy = 2x + 4y.$$

Какое наибольшее значение может принимать x?

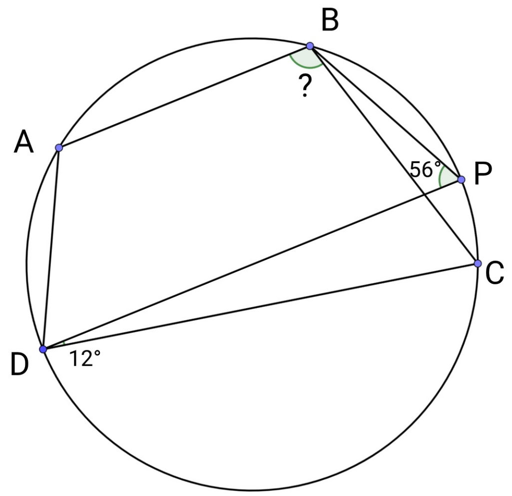
Ответ. 12.

Решение. Из равенства $\frac{9x}{y} = xy$ следует, что либо $x = 0$, либо $9 = y^2$, откуда $y = -3$ или $y = 3$.

- Если $y = -3$, то равенство $xy = 2x + 4y$ превращается в следующее: $-3x = 2x - 12$, откуда $x = \frac{12}{5}$.
- Если $y = 3$, то равенство $xy = 2x + 4y$ превращается в следующее: $3x = 2x + 12$, откуда $x = 12$.

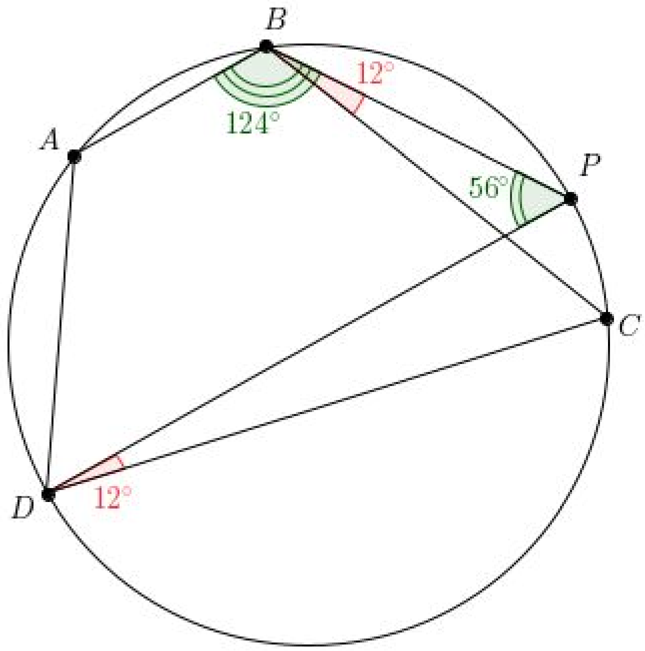
Таким образом, $x = 0$, $\frac{12}{5}$ или 12, поэтому наибольшее значение x равно 12.

3. На чертеже четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Прямая, проходящая через точку D, параллельно AB, пересекает ω в точке P. Известно, что $\angle PDC = 12°$, $\angle DPB = 56°$. Найдите величину угла $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



Ответ. 112.

Решение. Заметим, что $\angle ABP = 180° - \angle DPB = 180° - 56° = 124°$ (внутренние односторонние углы при параллельных прямых AB и DP и секущей BP).



Из равенства вписанных углов, опирающихся на дугу CP, получим $\angle PBC = \angle PDC = 12°$. Наконец, $\angle ABC = \angle ABP - \angle PBC = 124° - 12° = 112°$.

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОД(a,b) = 2 и НОД(b,c) = 4. Чему может быть равен НОД(a,c)? Выберите все верные ответы:
a) 12; b) 3; c) 6; d) 1; e) 2.

Ответ. c), e).

Решение. a) Если НОД(a,c) = 12, то и a, и c делятся на 4. По условию, НОД(b,c) = 4, т.е. и b, и c делятся на 4. Но тогда и a, и b делятся на 4, а значит и их НОД должен делится на 4, что не так.
b) Так как НОД(a,b) = 2 и НОД(b,c) = 4, то каждое из чисел a, b, c должно делится на 2. Значит, НОД(a,c) тоже должен делится на 2, поэтому не может быть равен 3.
c) Подойдут числа $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$.
d) Аналогично пункту b).
e) Подойдут числа $a = 2$, $b = 4$, $c = 4$.

5. У Жоры есть коробка конфет, в которой конфеты расположены прямоугольником 4×5 (4 строчки, 5 столбцов). Жора берёт по одной конфете, каждый раз выбирая из строки, в которой осталось максимальное количество конфет; если таких несколько — из любой из них. Сколькими способами Жора мог съесть первые 5 конфет; порядок поедания важен?

Ответ. 240000.

Решение.

- Первую конфету Жора может съесть любую — т.е. у него 20 способов.
- Для каждого из этих 20 способов вторую конфету Жора сможет съесть уже только 15 способами: в таблице останется 3 строки, в каждой из которых по 5 конфеты (и из этих 15 будет выбирать Жора), а также одна строка с 4 конфетами. То есть выбрать первые две конфеты у Жоры

$$\underbrace{15+15+\ldots+15}_{20} = 20\cdot 15$$

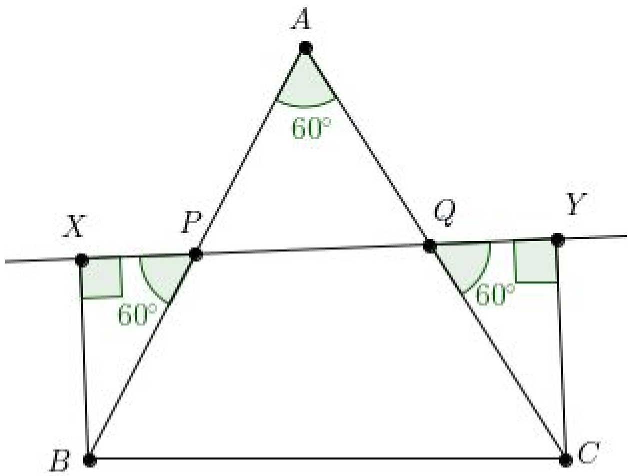
  способов.
- Аналогично предыдущему: для каждого из этих $20\cdot 15$ способов выбрать первые две конфеты у Жоры есть по 10 способов выбрать третью конфету. То есть выбрать первые три конфеты у него $20\cdot 15\cdot 10$ способов.
- Аналогично предыдущему: выбрать первые четыре конфеты у Жоры $20\cdot 15\cdot 10\cdot 5$ способов.
- Наконец, для каждого из $20\cdot 15\cdot 10\cdot 5$ способов выбрать первые четыре конфеты у Жоры есть по 16 способов выбрать пятую конфету: за предыдущие четыре выбора Жора взял по одной конфете из каждой строки, т.е. сейчас в каждой строке осталось по 4 конфеты и Жора вновь может выбрать из всех конфет.

Итого, ответ $20\cdot 15\cdot 10\cdot 5\cdot 16 = 240\,000$.

6. Прямая ℓ, пересекающая стороны AB и AC треугольника ABC, разбивает его на равносторонний треугольник и на четырёхугольник. Пусть X и Y — проекции точек B и C на прямую ℓ. Найдите длину отрезка XY, если $AB = 20$, $AC = 21$.

Ответ. $20{,}5 = \dfrac{41}{2}$

Решение. Обозначим точки пересечения ℓ с AB и AC соответственно как P и Q. Заметим, что $\angle XPB = \angle APQ = 60^\circ$ (так как треугольник APQ равносторонний по условию), поэтому треугольник PXB — прямоугольный с острыми углами 60° и 30°, а тогда $XP = \frac{1}{2}BP$. Аналогично $QY = \frac{1}{2}CQ$.



Тогда запишем равенство (при этом будем использовать, что $PQ = AP = BP$):

$$XY = XP + PQ + QY = \frac{1}{2}BP + PQ + \frac{1}{2}CQ = \frac{BP + 2PQ + CQ}{2} = \\ = \frac{(BP + AP) + (AQ + CQ)}{2} = \frac{AB + AC}{2} = \frac{20 + 21}{2} = 20{,}5.$$

7. В стране 3 мегаполиса и 7 городков. Авиакомпания планирует расписание полётов между ними. Руководитель хочет, чтобы выполнялись следующие условия:

- от любого населённого пункта до любого другого можно добраться (прямым рейсом или с пересадками);
- если из пункта A есть рейс в пункт B, то и из пункта B есть рейс в пункт A;
- из двух мегаполисов можно улететь ровно в четыре населённых пункта, а из одного — в три;
- из каждого городка можно улететь ровно в один населённый пункт.

Сколько существует способов организовать такое расписание?

Ответ. 1680.

Решение. Для начала заметим, что из городка можно улететь только в мегаполисы: если из какого-то городка X единственный рейс ведёт в городок Y, то и из Y единственный рейс ведёт в X, т.е. из городков X и Y больше никуда не добраться.

Заметим, что ни в один мегаполис не может прилетать 4 рейса: тогда из этих 5 населённых пунктов (мегаполиса и 4 городков) больше нельзя никуда улететь. Значит, в каждый мегаполис прилетают рейсы не более чем из трёх городков.

Суммарно в мегаполисы должны прилететь 7 рейсов из городков. Существует только два способа, как можно представить число 7 в виде суммы трёх чисел, каждое из которых не превосходит 3:

- $\mathbf{3+3+1}$. Назовём эти мегаполисы A_1, A_2 и B соответственно. Мегаполис B дополнительно должен быть соединён ещё хотя бы с двумя другими мегаполисами, значит ровно с двумя он и соединён. После этого у мегаполисов A_1 и A_2 также будет по 4 рейса.

  Посчитаем теперь количество таких расписаний:

  $$3 \cdot C_7^3 \cdot C_4^3 = 420$$

  вариантов (тут 3 — это количество способов выбрать мегаполис B, после чего для мегаполиса A_1 надо из 7 городков выбрать 3, в которые из него будет рейс, далее из 4 оставшихся — 3 для мегаполиса A_2).

- $\mathbf{3+2+2}$. Назовём мегаполис, соответствующий 3, A. Заметим, что из A должна быть какая-то возможность ещё куда-то добраться, т.е. должен быть ешё хотя бы один рейс в какой-то другой мегаполис. Назовём этот мегаполис B, а оставшийся — C.

  Сейчас мы уже знаем про 4 рейса из A, 3 рейса из B и 2 рейса из C. Из C должен выходить ещё хотя бы один рейс в какой-то мегаполис. Это может быть только B, ведь из A уже идёт 4 рейса.

  Сейчас все рейсы между мегаполисами определены. Посчитаем теперь количество таких расписаний:

  $$3 \cdot 2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^2 = 1260$$

  вариантов (здесь 3 — способы выбрать мегаполис A, 2 — мегаполис B, C_7^3 — сколькими способами можно выбрать городки для A, C_4^2 — после этого выбрать городки для B).

Итого, всего способов $1260 + 420 = 1680$.

8. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_9 таковы, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_9^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_9} = 48.$$

Какое наибольшее значение может принимать a_1?

Ответ. 96.

Решение. Домножим обе части равенства на знаменатель дроби, перенесём всё в левую часть равенства и сгруппируем:

$$(a_1^2 - 48a_1) + (a_2^2 - 48a_2) + \ldots + (a_9^2 - 48a_9) = 0.$$

Теперь прибавим к выражениям в скобках по 24^2, а чтобы равенство сохранилось — к правой части прибавим $9 \cdot 24^2$, получим:

$$(a_1^2 - 48a_1 + 24^2) + (a_2^2 - 48a_2 + 24^2) + \ldots + (a_9^2 - 48a_9 + 24^2) = 9 \cdot 24^2.$$

Теперь каждую скобку запишем как квадрат разности:

$$(a_1 - 24)^2 + (a_2 - 24)^2 + \ldots + (a_9 - 24)^2 = 72^2.$$

Оценим первое слагаемое:

$$(a_1 - 24)^2 = 72^2 - (a_2 - 24)^2 - \ldots - (a_9 - 24)^2 \leqslant 72^2,$$

поэтому $-72 \leqslant a_1 - 24 \leqslant 72$ и $-48 \leqslant a_1 \leqslant 96$. Таким образом, $a_1 \leqslant 96$. Значение $a_1 = 96$ достигается при $a_2 = \ldots = a_9 = 24$.