

10 класс

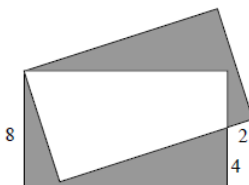
Задача 10.1. (4 балла) Действительные числа a_1, a_2, \dots, a_{90} образуют арифметическую прогрессию. Чему равно $a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{89}$, если $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{90} = 3000$?

Задача 10.2. (4 балла) Натуральное число назовём *хорошим*, если для него выполняются все следующие условия:

- В его десятичной записи все цифры ненулевые;
- Сумма его цифр равна 32;
- Любая его цифра, кроме последних двух, является делителем суммы следующих за ней двух цифр.

Найдите наименьшее хорошее число.

Задача 10.3. Два равных прямоугольника имеют общую вершину и наложены друг на друга как на рисунке.



(а) (2 балла) Найдите вторую сторону прямоугольника.

(б) (2 балла) Найдите площадь закрашенной серым цветом части.

Задача 10.4. (4 балла) Приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что каждое из чисел 0, 4, 6, 8, 9, 12 является корнем одного из трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$, $P(x) + Q(x)$. Чему равно $P(0) + Q(0)$?

Напомним, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ называется *приведённым*, если $a = 1$.

Задача 10.5. На городском проспекте через равные расстояния расположены 11 зданий: склады с напитками, курьерская компания, и 5 офисов. Расстояние между каждыми соседними зданиями равно 1 км.



Вчера утром поступило пять одинаковых заказов из офисов. В каждый офис нужно было привезти пять ящиков бутылок: с молоком, с кефиром, с квасом, с соком и с минеральной водой. Автомобиль курьера Василия может одновременно везти только один ящик. Вчера он выехал из здания курьерской компании и развозил напитки в офисы, пока не выполнил все заказы, а затем вернулся в точку старта.

(а) (1 балл) За доставку каждого ящика Василий получает 100 рублей. Сколько рублей Василий заработал за вчерашний день?

(б) (3 балла) На каждый километр пути автомобиль Василия тратит бензина на 5 рублей. Какую минимальную сумму Василий мог потратить на бензин за вчерашний день?

Задача 10.6. (4 балла) Дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AD = BC$, $\angle DAC = 97^\circ$, $\angle CBD = 83^\circ$ и $\angle BCD = 65^\circ$. Найдите $\angle ACD$ (ответ дайте в градусах).

Задача 10.7. (4 балла) Школьный актовый зал представляет из себя квадрат 11×11 . На вечернем мероприятии все места были заняты. Каждый из присутствующих сказал: «В моём горизонтальном ряду сидит больше девочек, чем в моём вертикальном ряду». Оказалось, что 60 детей сказало правду, а 61 — неправду. Какое наибольшее число девочек могло присутствовать?

Задача 10.8. Функция $f(x)$ определена на множестве натуральных чисел и принимает натуральные значения. Известно, что для любого натурального n выполнено $f(n+1) > f(n)$ и $f(f(n)) = 3n$.

(а) (1 балл) Найдите $f(10)$.

(б) (3 балла) Найдите $f(2024)$.