7 класс

Задача 7.1. (4 балла) Бегемотики Ася и Вася изначально весили одинаково. За год вес Аси увеличился в $3,5$ раза, в следующий год — ещё в $2,5$ раза, а в третий — ещё в $1,5$ раза. При этом вес Васи в первый год увеличился в $4,5$ раза, во второй — ещё в $3,5$ раза, а в третий — ещё в $2,5$ раза. Во сколько раз теперь Вася тяжелее Аси?

Ответ: 3

Решение. Пусть изначально Ася и Вася весили по x кг. Тогда через три года вес Аси стал равен $3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5x$, а вес Васи — $4,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5x$. Значит, Вася тяжелее Аси в $\frac{4,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5}{3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5} = \frac{4,5}{1,5} = 3$ раза. □

Задача 7.2. (4 балла) Петя написал на доске семизначное число. Для каждой пары соседних цифр этого числа Вася записал себе в тетрадку их сумму. Оказалось, что у Васи все числа различные. Какое максимальное число мог написать Петя?

Ответ: 9988776

Решение. Заметим, что число 9988776 подходит, поскольку суммы соседних пар цифр равны $9+9=18$, $9+8=17$, $8+8=16$, $8+7=15$, $7+7=14$, $7+6=13$. Докажем, что большего числа получиться не могло.

Если какое-то семизначное число больше, чем 9988776, то первые две цифры у него должны быть равны 9. Тогда третья цифра не может быть равна 9, иначе будут две совпадающие суммы $9+9=18$. Значит, она не больше 8. Аналогично, четвёртая цифра не может быть равна 9, иначе будут две суммы $9+8=8+9=17$. Тогда она не больше 8.

Продолжая те же самые рассуждения, получаем, что пятая цифра не больше 7 (иначе будет либо $8+9=9+8=17$, либо $8+8=8+8=16$). Шестая цифра не больше 7 (иначе либо $9+7=8+8=16$, либо $7+8=8+7=15$). Седьмая цифра не больше 6 (иначе либо $7+9=8+8$, либо $7+8=8+7=15$, либо $7+7=7+7=14$). Значит, больше чем 9988776 получить не получится. □

Задача 7.3. (4 балла) На прямой в некотором порядке расположены пять различных точек A, B, C, D и E. Известно, что $AB=4, BC=7, CD=11, DE=16$.

Чему равно наименьшее возможное расстояние между A и E?

Ответ: 2

Решение. Нарисуем числовую прямую так, чтобы точка A попала в 0. Тогда чтобы попасть из A в E, нужно сделать шаги длинами 4, 7, 11 и 16 в некоторых направлениях. То есть расстояние от A до E будет равно модулю суммы чисел 4, 7, 11, 16, где каждое число взято с плюсом или с минусом.

Если взять числа 16 и 4 с плюсом, а 11 и 7 — с минусом, то итоговое значение суммы будет равно $16 + 4 - 7 - 11 = 2$. Соответствующее расположение точек показано на рисунке. Докажем, что меньше быть не может.

Если взять оба числа 16 и 11 с плюсом, то сумма будет не меньше $16+11-7-4 = 16$. Если оба с минусом, то аналогично сумма будет не больше $-16 - 11 + 7 + 4 = -16$, и модуль суммы будет не меньше 16.

Значит, 16 и 11 должны быть с разными знаками, т.е. их сумма будет равна 5 с каким-то знаком. Теперь получаем, что из чисел 4, 5, 7 с какими-то знаками нужно сделать наименьшее по модулю число. Если 4 и 5 разного знака, то получится число $7 \pm 1 > 2$. Иначе получится число $9 \pm 7 \geqslant 2$. Значит, наименьшее возможное значение это 2.

$\square$

Задача 7.4. (4 балла) Малыш и Карлсон решили пробежать три круга по стадиону. Малыш бежал всю дистанцию с постоянной скоростью 4 км/ч.

Карлсон бежал каждый круг с постоянной скоростью. Первый круг он бежал с той же скоростью, что и Малыш. Затем он подкрепился вареньем и пробежал второй круг в шесть раз быстрее.

После второго круга он тоже подкрепился вареньем, но понял, что объелся, и замедлился.

С какой скоростью Карлсон бежал третий круг, если они с Малышом финишировали одновременно, но в течение забега Карлсон потратил на поедание варенья столько же времени, сколько и на бег? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12

Решение. Обозначим длину круга за S км. Тогда и Малыш и Карлсон затратили на первый круг по $\frac{S}{4}$ часов. Малыш на все три круга затратил $\frac{S}{4} \cdot 3 = \frac{3S}{4}$ часов. Поскольку Карлсон финишировал одновременно с Малышом, причём бежал столько же времени, сколько и ел, то бежал он половину этого времени, т.е. $\frac{3S}{8}$ часов.

Второй круг Карлсон бежал со скоростью 24 км/ч, т.е. затратил на него $\frac{S}{24}$ часов. Получается, что на третий круг Карлсон затратил

$$\frac{3S}{8} - \frac{S}{4} - \frac{S}{24} = \frac{9S}{24} - \frac{6S}{24} - \frac{S}{24} = \frac{2S}{24} = \frac{S}{12}$$

Получается, что Карлсон бежал со скоростью 12 км/ч.

$\square$

Задача 7.5. (4 балла) Маша, Даша и Саша загадали по числу от 1 до 9, а затем сообщили эти числа друг другу. Оказалось, что все загаданные ребятами числа различны. После этого каждый из них произнёс по утверждению:

- Маша: «Сумма загаданных чисел делится на 4»
- Даша: «Если бы я могла загадывать числа больше 9, я бы загадала число в три раза больше, и тогда сумма загаданных увеличилась бы вдвое»
- Саша: «Все загаданные числа больше 2»

Напишите загаданные ими числа в любом порядке, если известно, что никто не из них не ошибся.

Ответ: 3, 5, 8.

Решение. Поймём, что означает высказывание Даши. Пусть она загадала число x, а сумма чисел Маши и Саши равна s. Тогда если увеличить x в три раза, сумма всех чисел станет равна $3x + s$, и она должна быть в два раза больше, чем $x + s$. Получаем $3x + s = 2x + 2s$, откуда $x = s$, т.е. число Даши равно сумме чисел Маши и Саши.

Таким образом, сумма всех чисел равна $2x$ и она должна делиться на 4, откуда x делится на 2. Поскольку все числа больше 2, то x может быть равно 4, 6 или 8.

Пусть $x = 4$. Тогда сумма чисел Маши и Саши равна 4, но оба их числа должны быть больше 2, противоречие.

Пусть $x = 6$. Тогда сумма чисел Маши и Саши равна 6. При этом оба их числа больше 2, что может быть только если они оба равны 3, но по условию все их числа различны, противоречие.

Значит, $x = 8$. Тогда сумма чисел Маши и Саши равна 8, причём они оба больше 2 и различны. Это бывает только если они равны 3 и 5. Значит, загаданные числа это 3, 5 и 8. $\square$

Задача 7.6. У Егора есть таблица 5×5. Назовём *крестом* какой-то клетки все 9 клеток из объединения её строки и столбца. Егор выбрал несколько клеток в этой таблице. После чего он написал в каждой клетке таблицы, сколько выбранных им клеток содержится в кресте этой клетки. В результате получилась такая таблица:

	1	2	3	4	5
A	3	2	2	3	3
B	2	2	2	1	2
C	2	2	2	2	1
D	1	1	1	1	1
E	1	2	2	2	2

(а) (1 балл) Сколько клеток загадал Егор?

Ответ: а) 5 клеток.

Решение. **(а)** Рассмотрим сумму всех чисел в таблице. Заметим, что каждая закрашенная клетка будет посчитана 9 раз, поскольку она будет считаться по одному разу для любой клетки из её креста. Значит, сумма чисел в таблице в 9 раз больше, чем количество загаданных клеток. А поскольку сумма чисел равна 45, то загадано 5 клеток.

□

Задача 7.7. **(б)** (3 балла) Найдите координаты загаданных клеток.

Ответ: б) $A2$, $A3$, $B4$, $C5$, $E1$.

Решение. **(б)** Заметим, что первый и второй столбцы отличаются ровно в 2 местах: $A1$ на 1 больше чем $A2$, а $E1$ на 1 меньше, чем $E2$. Обозначим за a количество закрашенных клеток среди $A1$; b — среди $B1, C1, D1$; c — среди $E1$; x — среди $A2$; y — среди $B2, C2, D2$; z — среди $E2$. Поскольку число в $A1$ на 1 больше числа в $A2$, то $b+c$ на 1 больше, чем $y+z$ (части в строке A одинаковые, а отличие идёт за счёт частей $B1$—$E1$ и $B2$—$E2$). Аналогично, за счёт того, что $E2$ на 1 больше чем $E1$, получаем, что $a + b$ на 1 меньше, чем $x + y$.

Значит, $b + c = 1 + y + z$ и $a + b = x + y - 1$. Если вычесть из второго уравнения первое, получим $a - c = x - z - 2$. Но $a - c \geqslant -1$ и $x - z \leqslant 1$, причём равенство достигается только если $a = 0, c = 1, x = 1, z = 0$. Таким образом, мы получаем, что клетки $A2$ и $E1$ задуманы, а $A1$ и $E2$ — нет.

Абсолютно аналогичные рассуждения можно проделать с первым и третьим столбцом и получить, что $A3$ — тоже задуманная клетка. Далее посмотрим на 3 и 4 столбцы. Они отличаются тем, что $A3$ на 1 меньше чем $A4$, а $B3$ на 1 больше, чем $B4$. Применяя аналогичное рассуждение получаем, что в $B4$ находится загаданная клетка. Далее то же самое применяем к столбцам 4 и 5 и клеткам $B4, B5, C4, C5$. Получаем, что $C5$ загадана. Таким образом, мы нашли все 5 загаданных клеток. Можно убедиться, что для них таблица с числами будет выглядеть именно так.

□

Задача 7.8. (4 балла) В лесу 40% деревьев — хвойные, при этом ели составляют 34% от числа хвойных деревьев.

(а) (1 балл) Какое наименьшее число деревьев может расти в таком лесу?

(б) (3 балла) На Новый год в лесу срубили несколько хвойных деревьев, и доля елей среди хвойных деревьев снизилась до 33%. А какое наименьшее число деревьев могло расти в лесу до Нового года при таком дополнительном условии?

Ответ: а) 125
б) 375

Решение. **(а)** Из условия получаем, что ели составляют

$$\frac{34}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{17}{50} \cdot \frac{2}{5} = \frac{34}{125}$$

от общего числа деревьев. Поскольку дробь $\frac{34}{125}$ — несократимая, то количество деревьев должно делиться на 125, чтобы количество елей было целым числом. Наименьшее натуральное число, которое делится на 125 — это 125. При этом 125 деревьев могло быть, если из них 50 хвойных, среди которых 17 елей.

(б) Мы уже поняли, что количество деревьев должно делиться на 125. Поскольку после Нового года елей стало $\frac{33}{100}$ от количества хвойных деревьев, то в этот момент количество елей должно делиться на 33, а количество хвойных должно делиться на 100.

Предположим, что до Нового года было 125 деревьев. Тогда среди них было 17 елей. Но тогда после Нового года числа, кратного 33, стать не могло.

Предположим, что до Нового года деревьев было 250. Тогда среди них было 100 хвойных, среди которых 34 ели. Поскольку количество елей после Нового года стало кратно 33, то это может быть только если их стало ровно 33. При этом должны срубить одну ель. Но тогда количество хвойных деревьев уменьшилось и уже не может быть кратно 100.

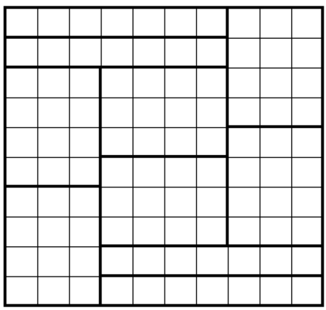
При этом 375 деревьев могло быть. Среди них было 150 хвойных, среди которых 51 ель. Потом срубили 18 елей и 32 других хвойных дерева. Елей стало 33, а всего хвойных деревьев 100, т.е. ели действительно теперь составляют 33% от всех хвойных деревьев.

□

Задача 7.9. (4 балла) Какое наименьшее количество прямоугольников 3×4 и 1×7 нужно использовать, чтобы сложить из них квадрат? При складывании нужно использовать хотя бы один прямоугольник каждого типа.

Ответ: 10.

Решение. Приведём пример, как можно использовать 10 прямоугольников.



Докажем, что меньшего количества прямоугольников получиться не могло. Сначала докажем, что итоговый квадрат не может быть размером меньше, чем 10×10.

Понятно, что размер квадрата не меньше, чем 7×7, т.к. есть прямоугольник 1×7. Если он равен 8×8, посмотрим на прямоугольник 1×7, пусть не ограничивая общности, он горизонтальный. Тогда в его строке остаётся одна свободная клетка, которая может быть занята только вертикальным прямоугольником 7×1. Тогда можно посмотреть на него и понять, что в его столбце одна клетка должна быть занята горизонтальным прямоугольником 1×1. Для него рассуждения аналогичны, и получаем, что эти прямоугольники должны быть на границе. Тогда внутри образуется квадрат 6×6. Заметим, что в нём уже прямоугольников 1×7 быть не может, поэтому он должен разбиваться на прямоугольники 3×4. Но если расположить один такой прямоугольник горизонтально, то в оставшиеся 2 клетки на горизонтали ничего расположить уже не удастся, с вертикальным аналогично.

Пусть теперь размер квадрата равен 9×9. Можно провести аналогичные рассуждения как и в случае 8×8 и получить, что по внешнему контуру должны быть по 2 прямоугольника 1×7. Значит внутренний квадрат 5×5 должен быть разбит на прямоугольники 3×4. Такого не может быть, поскольку площадь квадрата 5×5 не делится на площадь прямоугольника 3×4.

Значит, размер квадрата не меньше 10×10. Если он хотя бы 11×11, то площадь такого квадрата уже хотя бы 121. При этом площадь прямоугольника 1×7 равна 7, а площадь прямоугольника 3×4 равна 12, поэтому прямоугольников будет не меньше $\frac{121}{12} > 10$.

Осталось понять, что если квадрат имеет размер 10×10, то прямоугольников не менее 10. Пусть a — количество прямоугольников 3×4, а b — количество прямоугольников 1×7. Тогда $12a + 7b = 100$, откуда $12a = 100 - 7b$. Значит, $100 - 7b$ должно делиться на 12, а значит и на 4. Но так как 100 делится на 4, то и $7b$ должно делиться на 4, откуда b делится на 4.

Если $b = 4$, то $a = 6$ и $a + b = 10$. Если $b = 8$, то $a = 3$ и $a + b = 11$. Если же $b \geqslant 12$, то $a + b \geqslant 10$. Значит, меньше чем 10 прямоугольников использовать нельзя.

Таким образом, наименьшее количество прямоугольников, которое могло быть использовано — это 10.

$\square$