10 класс

Задача 10.1. (4 балла) Действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{90}$ образуют арифметическую прогрессию. Чему равно $a_2 + a_5 + a_8 + \ldots + a_{89}$, если $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{90} = 3000$?

Ответ: 1000

Решение. Как известно, в арифметической прогрессии каждый член равен среднему арифметическому своих соседей. Отсюда получаем, что $2a_2 = a_1 + a_3$, $2a_5 = a_4 + a_6$, ..., $2a_{89} = a_{88} + a_{90}$.

Обозначим $x = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots + a_{89}$ и $y = a_1 + a_3 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{88} + a_{90}$. Тогда $2x = y$. При этом $x + y = 3000$. Тогда $3x = 3000$, т.е. $x = 1000$.

□

Задача 10.2. (4 балла) Натуральное число назовём *хорошим*, если для него выполняются все следующие условия:

- В его десятичной записи все цифры ненулевые;
- Сумма его цифр равна 32;
- Любая его цифра, кроме последних двух, является делителем суммы следующих за ней двух цифр.

Найдите наименьшее хорошее число.

Ответ: 8888

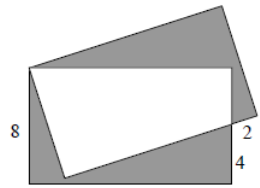
Решение. Несложно проверить, что число 8888 удовлетворяет всем условиям. Докажем, что меньшего числа получиться не могло. Предположим, что это не так.

Поскольку у числа сумма цифр равна 32, то в нём хотя бы 4 цифры. Если первая цифра не больше 7, то сумма оставшихся будет хотя бы 25, поэтому каждая цифра не меньше 7. Тогда сумма третьей и четвёртой цифры должны быть ровно в 2 раза больше третьей цифры, поскольку $7 \cdot 3 = 21 > 9 + 9$ и $9 + 9 = 18 < 25$. Значит, сумма второй, третьей и четвёртой цифр должна делиться на 3, но это возможно только если первая цифра равна 2, 5 или 8. Если первая цифра равна 2, то сумма цифр не больше 29, противоречие. Если первая цифра равна 5, то для суммы цифр 32 остальные должны быть равны 9, но число 5999 не подходит. Значит, первая цифра равна 8.

Поскольку сумма второй и третьей цифр должна делиться на 8, то их сумма должна быть равна 16, а тогда последняя цифра равна 8. Получаем варианты 8798, 8888, 8978, из которых подходит только 8888.

Если же первая цифра равна 9, то число получится больше, чем 8888, поэтому наименьшее хорошее число это 8888. □

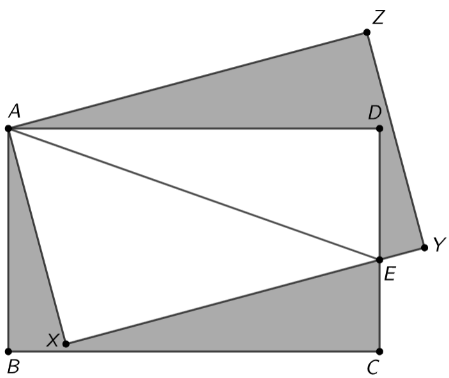
Задача 10.3. Два равных прямоугольника имеют общую вершину и наложены друг на друга как на рисунке.



(а) (2 балла) Найдите вторую сторону прямоугольника.

(б) (2 балла) Найдите площадь закрашенной серым цветом части.

Ответ: а) 13
б) 68



Решение. **(а)** Обозначим прямоугольники $ABCD$ и $AXYZ$ как на рисунке, а точку пересечения CD и XY через E.

По теореме Пифагора, с одной стороны, $AE^2 = AX^2 + XE^2$, а с другой $AE^2 = AD^2 + DE^2$. Если обозначить вторую сторону прямоугольника через x, то получаем $AX = 8, XE = x-2$, $DE = 8 - 4 = 4$, $AD = x$. Значит, $8^2 + (x-2)^2 = 4^2 + x^2$, откуда $52 = 4x$, т.е. $x = 13$.

(б) Чтобы найти площадь закрашенной серым части, нужно из суммы площадей прямоугольников $ABCD$ и $AXYZ$ вычесть удвоенную площадь $AXED$. Площадь каждого из прямоугольников равна $8 \cdot 13 = 104$. Площадь $AXED$ можно вычислить как сумму площадей прямоугольных треугольников AXE и ADE.

Площадь треугольника AXE равна $\frac{AX \cdot XE}{2} = \frac{8 \cdot (13-2)}{2} = 44$. Площадь треугольника ADE равна $\frac{AD \cdot DE}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.

Получаем, что площадь закрашенной серым части равна $104 \cdot 2 - 2 \cdot (44 + 16) = 68$.

□

Задача 10.4. (4 балла) Приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что каждое из чисел $0, 4, 6, 8, 9, 12$ является корнем одного из трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$, $P(x)+Q(x)$. Чему равно $P(0)+Q(0)$?

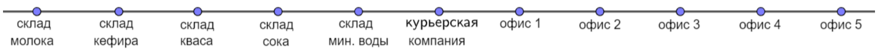
Напомним, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c называется *приведённым*, если $a=1$.

Ответ: 72.

Решение. Пусть $P(x)=x^2+ax+b$, а $Q(x)=x^2+cx+d$. Тогда по теореме Виета сумма корней $P(x)$ равна $-a$, а сумма корней $Q(x)$ равна $-c$. Трёхчлен $P(x)+Q(x)$ имеет вид $2x^2+(a+c)x+b+d$, его сумма корней равна $\frac{-a-c}{2}$, т.е. в 2 раза меньше, чем сумма корней $P(x)$ и $Q(x)$. Значит, сумма корней $P(x)+Q(x)$ составляет $\frac{1}{3}$ от общей суммы корней всех трёх трёхчленов. По условию она равна $0+4+6+8+9+12=39$, т.е. сумма корней $P(x)+Q(x)$ равна 13. Число 13 можно набрать единственным способом — $4+9$, т.е. корнями $P(x)$ и $Q(x)$ являются 4 и 9.

Поскольку у $P(x)+Q(x)$ первый коэффициент равен 2, то по теореме Виета второй коэффициент будет равен $-2(4+9)=-26$, а третий будет равен $2\cdot 4\cdot 9=72$. Значит, $P(x)+Q(x)=2x^2-26x+72$, откуда $P(0)+Q(0)=72$. □

Задача 10.5. На городском проспекте через равные расстояния расположены 11 зданий: склады с напитками, курьерская компания, и 5 офисов. Расстояние между каждыми соседними зданиями равно 1 км.



Вчера утром поступило пять одинаковых заказов из офисов. В каждый офис нужно было привезти пять ящиков бутылок: с молоком, с кефиром, с квасом, с соком и с минеральной водой. Автомобиль курьера Василия может одновременно везти только один ящик. Вчера он выехал из здания курьерской компании и развозил напитки в офисы, пока не выполнил все заказы, а затем вернулся в точку старта.

(а) (1 балл) За доставку каждого ящика Василий получает 100 рублей. Сколько рублей Василий заработал за вчерашний день?

(б) (3 балла) На каждый километр пути автомобиль Василия тратит бензина на 5 рублей. Какую минимальную сумму Василий мог потратить на бензин за вчерашний день?

Ответ: а) 2500
б) 1500.

Решение. **(а)** Василию нужно доставить каждый из пяти ящиков в каждый из пяти офисов. Значит, он должен выполнить $5\cdot 5=25$ заказов. Тогда он заработает за них $25\cdot 100=2500$ рублей.

(б) Понятно, что для минимизации трат бензина Василий должен доезжать до склада, затем сразу разворачиваться и ехать в офис, затем сразу разворачиваться и ехать на склад и т.д. При этом неважно, в каком порядке он будет развозить заказы.

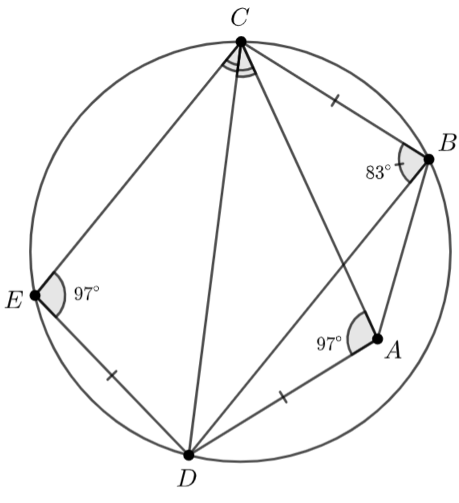
Для каждого единичного отрезка посчитаем, сколько раз курьер его проедет. Отрезок между курьерской компанией и офисом 1 будет пересечён $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ раз, поскольку курьер проедет его дважды при каждом заказе. Отрезок между офисом 1 и офисом 2 курьер проедет $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ раз, поскольку он проедет его на всех заказах кроме заказов из офиса 1. Аналогично, отрезок между офисами 2 и 3 курьер проедет $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ раз, между офисами 3 и 4 — 20 раз, между офисами 4 и 5 — 10 раз. С другой стороны будет всё то же самое из соображений симметрии.

Таким образом, суммарно курьер проедет $2(50 + 40 + 30 + 20 + 10) = 300$ километров. Значит, на бензин он потратит $300 \cdot 5 = 1500$ рублей.

□

Задача 10.6. (4 балла) Дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AD = BC$, $\angle DAC = 97°$, $\angle CBD = 83°$ и $\angle BCD = 65°$. Найдите $\angle ACD$ (ответ дайте в градусах).

Ответ: 32



Решение. Отразим A относительно CD, получим точку E. Тогда $\angle DEC = \angle DAC = 97°$. Поскольку углы DEC и CBD дают в сумме $180°$, а точки B и E лежат по разные стороны от CD, точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Хорды ED и BC равны, поскольку $ED = AD = BC$, а значит, $BCED$ — равнобокая трапеция. Значит, $\angle ECB = \angle DEC = \angle DAC = 97°$.

Тогда $\angle ECD = \angle ECB - \angle DCB = 97° - 65° = 32°$. Из симметрии получаем, что $\angle ACD = \angle ECD = 32°$.

□

Задача 10.7. (4 балла) Школьный актовый зал представляет из себя квадрат 11×11. На вечернем мероприятии все места были заняты. Каждый из присутствующих сказал: «В моём горизонтальном ряду сидит больше девочек, чем в моём вертикальном ряду». Оказалось, что 60 детей сказало правду, а 61 — неправду. Какое наибольшее число девочек могло присутствовать?

Ответ: 115

Решение. Пусть дети сидят следующим образом: 6 мальчиков сидят в одном горизонтальном ряду, а на остальных местах сидят девочки. Тогда правду скажут только те девочки, которые сидят в одном вертикальном ряду с каким-то из этих мальчиков. Таких девочек $6 \cdot 10$, т.е. как раз 60.

Докажем, что больше девочек быть не может. Заметим, что если в каком-то вертикальном ряду все являются девочками, то все они говорят неправду, т.к. в их горизонтальном ряду не может быть больше 11 девочек. Но тогда, если девочек больше 115, то найдётся хотя бы 6 вертикальных рядов, целиком заполненных девочками, а значит, людей, сказавших неправду, будет хотя бы $6 \cdot 11 = 66$, противоречие.

□

Задача 10.8. Функция $f(x)$ определена на множестве натуральных чисел и принимает натуральные значения. Известно, что для любого натурального n выполнено $f(n+1) > f(n)$ и $f(f(n)) = 3n$.
(а) (1 балл) Найдите $f(10)$.
(б) (3 балла) Найдите $f(2024)$.

Ответ: а) 19
б) 3885

Решение. **(а)** Из первого условия получаем, что если $x > y$, то $f(x) > f(y)$, поскольку можно записать цепочку $f(x) > f(x-1) > f(x-2) > \ldots > f(y)$.

Заметим, что из условия $f(f(n)) = 3n$ можно понять, что $f(n) > n$. Действительно, пусть $f(n) = k \leqslant n$. Тогда получаем $f(k) = f(f(n)) = 3n > k = f(n)$, противоречие с тем, что $k \leqslant n$.

Пусть $f(1) = a$. Из предыдущего получаем, что $a > 1$. При этом $f(a) = 3$, откуда $a < 3$. Значит, $a = 2$. Отсюда $f(3) = f(f(2)) = 6$. Тогда $f(6) = f(f(3)) = 9$. Заметим, что $f(4)$ и $f(5)$ располагаются между $f(3)$ и $f(6)$, т.е. между 6 и 9. Значит, единственная возможность это $f(4) = 7$ и $f(5) = 8$.

Тогда $f(7) = f(f(4)) = 12$, отсюда $f(12) = f(f(7)) = 21$. Кроме того, $f(9) = f(f(6)) = 18$. Снова можно понять, что $f(10)$ и $f(11)$ должны располагаться между 18 и 21, т.е. $f(10) = 19$ и $f(11) = 20$.

(б) Докажем индукцией по n, что $f(3^n + x) = 2 \cdot 3^n + x$, где $0 \leqslant x < 3^n - 1$ и $f(2 \cdot 3^n + x) = 3^{n+1} + 3x$, где $0 \leqslant x < 3^n - 1$. База для $n = 1$ была получена в пункте а). Пусть формулы верны для чисел от 3^{k-1} до $3^k - 1$. Докажем формулы для чисел от от 3^k до $3^{k+1} - 1$.

По предположению $f(2\cdot 3^{k-1})=3^k$. Тогда $f(3^k)=f(f(2\cdot 3^{k-1}))=3\cdot 2\cdot 3^{k-1}=2\cdot 3^k$. Тогда $f(2\cdot 3^k)=f(f(3^k))=3\cdot 3^k=3^{k+1}$. Заметим, что между 3^k и $2\cdot 3^k$ лежит ровно 3^k-1 число, и между значениями функции в этих точках $f(3^k)=2\cdot 3^k$ и $f(2\cdot 3^k)=3^{k+1}$ тоже лежит ровно 3^k-1 число. Так как функция принимает только натуральные значения и строго возрастает, значит каждое следующее значение ровно на единицу больше предыдущего, и на этом промежутке верна формула $f(3^k+x)=2\cdot 3^k+x$. Но тогда для всех таких x, что $0\leqslant x<3^n-1$ верно $f(2\cdot 3^k+x)=f(f(3^k+x))=3\cdot(3^k+x)=3^{k+1}+3x$. Таким образом, переход доказан.

Теперь найдем ответ. По формуле $f(2024)=f(2\cdot 3^6+566)=3^7+3\cdot 566=3885$.

$\square$