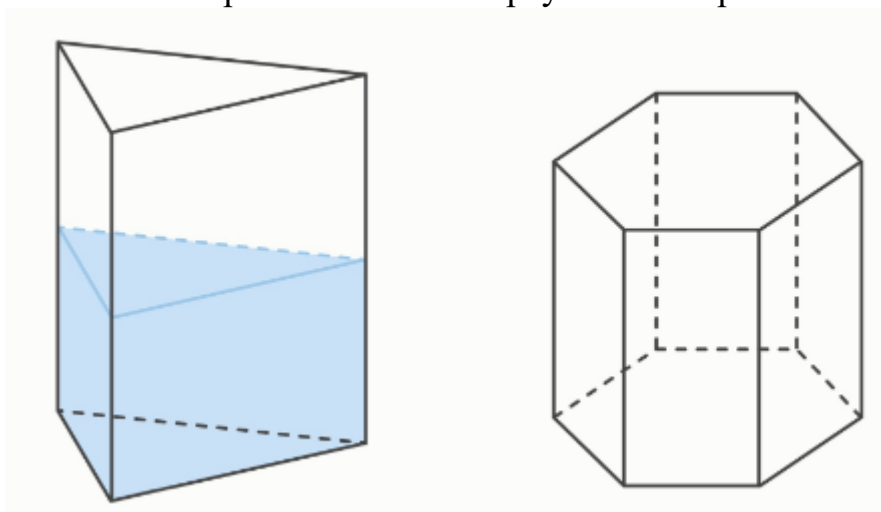


ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.  
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

1. Девять действительных  $a_1, a_2, \dots, a_9$  образуют арифметическую прогрессию. Известно, что  $a_9$  в 3 раза больше среднего арифметического этих девяти чисел. Найдите  $a_1$ , если известно, что  $a_4 = 6$ .

2. В сосуде, имеющем форму правильной треугольной призмы, находилась вода, причём её уровень составлял 30 сантиметров. Всю эту воду перелили в пустой сосуд, имеющий форму правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше стороны основания треугольной призмы.



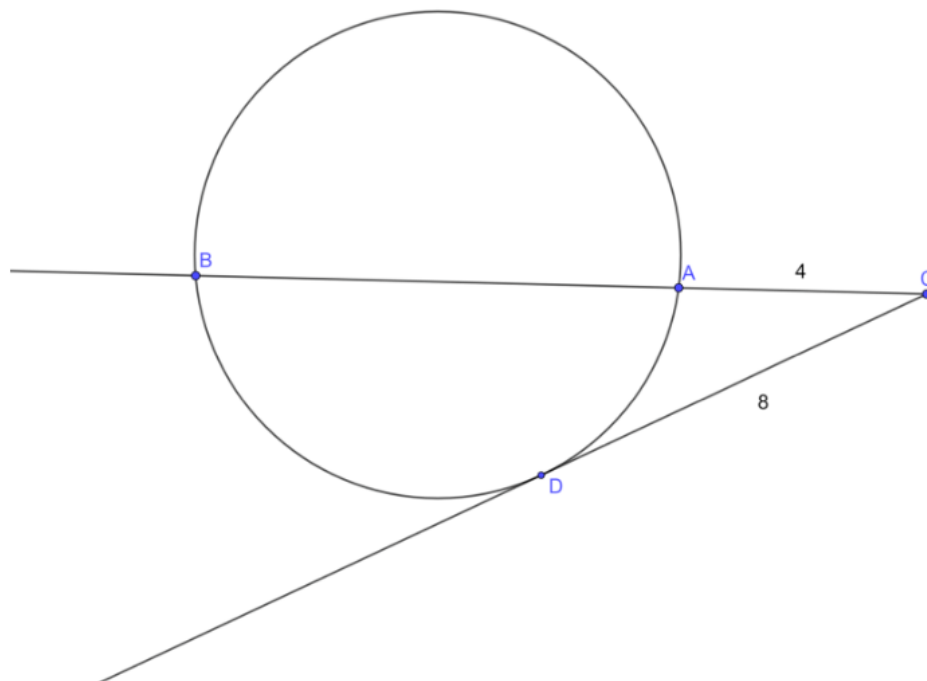
Чему равен уровень воды теперь? Ответ выразите в сантиметрах.

3. Андрей, Борис и Влад зашли в магазин. Андрей купил 1 мороженое, 2 булочки и 3 шоколадки и заплатил за это 235 рублей. Борис купил 3 порции мороженого, 2 булочки и 1 шоколадку и заплатил за это 205 рублей. Сколько рублей должен будет заплатить Влад, если он купит 6 порций мороженого, 5 булочек и 4 шоколадки?

4. Каждая клетка таблицы  $11 \times 11$  покрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Известно, что одноцветные клетки не граничат по стороне, а также что красные и синие клетки не граничат по стороне. Сколько зелёных клеток может быть в таблице? Укажите все возможные варианты.

5. Найдите наибольшее натуральное число, которое в 9 раз больше своего остатка от деления на 1024.

6. Даны окружность  $\omega$  радиуса 6 и точка  $C$ , лежащая вне её. Из точки  $C$  провели касательную, касающуюся  $\omega$  в точке  $D$ , и секущую, пересекающую  $\omega$  в точках  $A$  и  $B$ . Оказалось, что  $CD = 8$  и  $AC = 4$ . Найдите площадь треугольника  $BCD$ .



7. В стране 15 городов. Между любыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет. Оказалось, что для любого города  $A$  найдутся такие три города, что они между собой попарно не соединены дорогами, но каждый из них соединён дорогой с  $A$ . Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

8. Три приведённых квадратных трёхчлена имеют одинаковые дискриминанты, большие 0. Все корни этих трёхчленов упорядочили по возрастанию, и получилось 6 различных целых чисел:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Известно, что  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 11$ ,  $x_3 = 12$ ,  $x_6 = 23$ . Найдите  $x_4$  и  $x_5$ .