Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

Нижний Новгород, 19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

10 класс

10.5. Дана прямолинейная дорога, выложенная из зелёных и красных дощечек (дорога — отрезок, разбитый на отрезки-дощечки). Цвета дощечек чередуются; первая и последняя дощечки — зелёные. Известно, что длины всех дощечек больше сантиметра и меньше метра, а также что длина каждой следующей дощечки больше предыдущей. Кузнечик хочет пропрыгать вперёд по дороге по этим дощечкам, наступив на каждую зелёную дощечку хотя бы один раз и не наступив ни на одну красную дощечку (или границу между соседними дощечками). Докажите, что кузнечик может сделать это так, чтобы среди длин его прыжков встретилось не более 8 различных значений. (*Т. Коротченко*)

Решение. Считаем, что дощечки выложены на числовой прямой. Примем $1 = 1$ см.

Возьмем $0 < \varepsilon < 0,01$ такое, что разность длин любой пары соседних дощечек больше 10ε. Отметим на прямой бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью ε так, чтобы концы дощечек не были отмечены. Кузнечик будет прыгать только по отмеченным точкам, и длины его прыжков будут из множества $\{\varepsilon, \ell, 2\ell, 4\ell, 8\ell, 16\ell, 32\ell, 64\ell\}$, где $\ell = N\varepsilon$, а натуральное N подберём так, что $\ell < 2$ и $64\ell > 101$.

Стратегия кузнечика будет такой: прыгать вправо по зелёной дощечке на ε пока возможно, и далее перепрыгивать очередную красную дощечку прыжком минимальной возможной длины (такая длина найдётся, поскольку длина самого длинного прыжка больше $100 + \varepsilon$). Итак, пусть сделан прыжок длины $2d$ из зелёного отрезка через очередной красный отрезок $[a, b]$. Нам остаётся убедиться, что после этого прыжка кузнечик окажется в следующем зелёном отрезке $[b, c]$. Предположим, что это не так, и кузнечик из точки $a-x$, где $0 < x < \varepsilon$ перепрыгнул в точку $a-x+2d > c$. Видим, что $2d > (c-b)+(b-a) > 2$, значит, в множестве длин прыжков кузнечика есть длина d. Далее, по выбору ε, имеем $(c - b) > (a - b) + 10\varepsilon$, поэтому можем оценить $2d > (c - b) + (b - a) > 2(b - a) + 10\varepsilon$. Видим, что $d > (b - a) + \varepsilon$, а значит, кузнечик мог из точки $a - x$ перепрыгнуть красный отрезок $[a, b]$ прыжком более коротким, чем $2d$. Противоречие.

10.6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина дуги ABC окружности, описанной около треугольника ABC. На отрезке AD отмечена точка E, а на отрезке CD — точка F. Известно, что $ME = MD = MF$. Докажите, что точки B, M, E и F лежат на одной окружности. (*А. Терёшин*)

Первое решение. Пусть $\angle ADC = x$. Из равнобедренных треугольников DME и DMF (или из того, что M — центр окружности (DEF)) имеем $\angle EMF = 360^\circ - 2x$ (см. рис. 3). Для решения задачи остаётся понять, что тому же равен $\angle EBF$.

При гомотетии с центром D и коэффициентом $1/2$ точки E, F, B перейдут соответственно в E', F', B' — середины отрезков DE, DF и DB. Вместо $\angle EBF$ найдём $\angle E'B'F'$, заметив, что E' и F' — проекции M на AD и CD, а B' — центр параллелограмма, или середина AC, тем самым, B' — проекция M на AC. Видим, что M, E', A, B' лежат на одной окружности с диаметром MA. Отсюда $\angle DE'B' = \angle AMB' = \angle AMC/2 = \angle ABC/2 = x/2$. Аналогично $\angle DF'B' = x/2$. Из четырёхугольника $E'B'F'D$ видим, что $\angle E'B'F' = 360^\circ - x - x/2 - x/2 = 360^\circ - 2x$, что и требовалось.

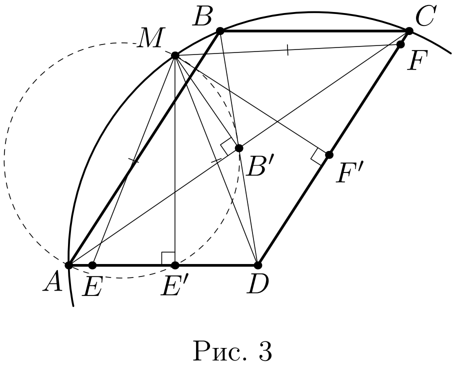

Рис. 3

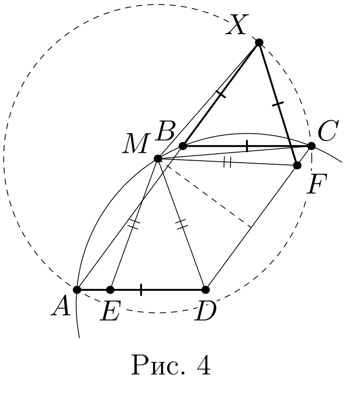

Рис. 4

Второе решение. Достаточно доказать равенство углов $\angle ABE = \angle CBF$ (т.е. изогональность BE и BF относительно AB, BC). Действительно, тогда M будет лежать на внешней биссектрисе угла EBF и на серединном перпендикуляре к EF, а значит, будет совпадать с серединой дуги (EBF).

Равенство углов $\angle ABE = \angle CBF$, в свою очередь, эквивалентно подобию $ABE \sim CBF$. Докажем это подобие.

Отметим на луче AB за точкой B точку X так, что $BX = BC$, а на луче CB за точкой B точку Y так, что $BY = BA$. Легко понять, что треугольники BMC и BMX равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $MX = MC = MA$. Рассмотрим серединный перпендикуляр к DF, тогда он является перпендикуляром к параллельной прямой AX, а поскольку $MA = MX$, то он же является серединным перпендикуляром к AX. Таким образом, трапеция $ADFX$ равнобедренная, а раз $ABCD$ — параллелограмм, то $CXBF$ — также равнобедренная трапеция, причём $CB = BX = XF$ и $\angle XBC = 180^\circ - \angle ABC$. Аналогичное получим для трапеции $AYBE$. Видим, что $AYBE \sim CXBF$, откуда следует нужное нам $ABE \sim CBF$.

Замечание. Требуемое в решении 2 подобие $ABE \sim CBF$ можно доказать и по-другому — установив равенство $AE \cdot BC = CF \cdot AB$. Последнее можно сделать, например, счётом в синусах через элементы треугольника ABC, выразив проекцию AM на AD, далее выразив отрезок AE и т.д.

Имеются и другие вычислительные решения, в том числе с использованием комплексных чисел.

10.7. Пусть даны натуральные числа x_1 и x_2. На прямой даны y_1 белых отрезков и y_2 чёрных отрезков, при этом $y_1 \geqslant x_1$ и $y_2 \geqslant x_2$. Известно, что никакие два отрезка одного цвета не пересекаются (даже не имеют общих концов). Также известно, что при любом выборе x_1 белых отрезков и x_2 чёрных отрезков обязательно какая-то пара выбранных отрезков будет пересекаться. Докажите, что

$$(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) < x_1 x_2.$$

(*Г. Челноков*)

Первое решение. Пронумеруем белые отрезки слева направо как $w_1, w_2, \ldots, w_{y_1}$, а чёрные — как $b_1, b_2, \ldots, b_{y_2}$. Для каждого чёрного отрезка b_j назовём его *силой* $S(b_j)$ количество индексов $i \leqslant y_1 - 1$ таких, что b_j пересекается как с w_i, так и с w_{i+1}. Если с какой-то парой (w_i, w_{i+1}) пересекаются два чёрных отрезка, то они имеют общую точку, что невозможно по условию. Поэтому каждая такая пара учтена в силе не более, чем одного чёрного отрезка, а значит,

$$\sum_{j=1}^{y_2} S(b_j) \leqslant y_1 - 1.$$

Рассмотрим следующие y_1 групп, состоящих из x_1 белых отрезков каждая: при $0 \leqslant i \leqslant y_1 - x_1$ группа G_i состоит из отрезков $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_{i+x_1}$, а при $y_1 - x_1 + 1 \leqslant i \leqslant y_1 - 1$ группа G_i состоит из отрезков $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_{y_1}$, а также из w_1, w_2, $\ldots$, $w_{i+x_1-y_1}$ (иначе говоря, каждая группа состоит из x_1 последовательных отрезков в циклическом порядке). Для группы G_i обозначим через $N(G_i)$ количество чёрных отрезков, не пересекающихся ни с одним из отрезков в G_i. По условию, $N(G_i) \leqslant x_2 - 1$; поэтому

$$\Sigma := \sum_{i=0}^{y_1-1} N(G_i) \leqslant y_1(x_2 - 1).$$

С другой стороны, каждый чёрный отрезок b_j пересекается максимум с $1+S(b_j)$ белыми отрезками, и все эти белые отрезки расположены подряд. Тогда количество групп, содержащих хотя бы один из этих белых отрезков, не превосходит $1 + S(b_j) + (x_1 - 1) = S(b_j) + x_1$. Поэтому отрезок b_j учтён хотя бы в $y_1 - (S(b_j) + x_1)$ числах вида $N(G_i)$. Поэтому

$$\Sigma \geqslant \sum_{j=1}^{y_2}(y_1 - S(b_j) - x_1) = y_2(y_1 - x_1) - \sum_{j=1}^{y_2} S(b_j) \geqslant$$
$$\geqslant y_2(y_1 - x_1) - (y_1 - 1).$$

Из полученных двух оценок на Σ вытекает, что

$$y_1(x_2-1) \geqslant y_2(y_1-x_1)-(y_1-1) \iff (y_1-x_1)(y_2-x_2) \leqslant x_1x_2-1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Предположим, что утверждение задачи для некоторых x_1, x_2, y_1, y_2 неверно: $(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \geqslant x_1x_2$, и при этом условии сумма $y_1 + y_2$ — минимальная возможная.

Без ограничения общности тогда $y_1 - x_1 \geqslant x_1$. Возьмём x_1-й слева белый отрезок W и $(y_2 - x_2)$-й слева чёрный отрезок B. У какого-то из них правый конец левее.

1) Пусть правый конец W левее (или концы совпадают).

Тогда правые x_2 чёрных отрезков не пересекаются с левыми x_1 белыми. Противоречие.

2) Пусть правый конец B левее. Выкинем все белые отрезки слева от W (включая его) и все чёрные отрезки слева от B (включая его). Оставшиеся белые отрезки (их хотя бы x_1) не пересекаются с выкинутыми $y_2 - x_2$ чёрными; отсюда уже следует, что $y_2 - x_2 < x_2$.

Положим $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1 - x_1 \geqslant x'_1$, $x'_2 = x_2 - (y_2 - x_2)$ и $y'_2 = y_2 - (y_2 - x_2) = x_2 \geqslant x'_2$; тогда осталось y'_1 белых и y'_2 чёрных отрезков. Рассмотрим любые x'_1 оставшихся белых и x'_2 оставшихся чёрных отрезков. Если среди них нет пересекающихся, то, добавив к ним все выкинутые чёрные отрезки, получим набор из $x_1 = x'_1$ белых и $x_2 = x'_2 + (y_2 - x_2)$ чёрных отрезков исходного набора, среди которых нет пересекающихся; это невозможно. Значит, оставшийся набор удовлетворяет условию (для новых чисел x'_1, y'_1, x'_2 и y'_2), при этом в нём меньше отрезков, чем в исходном, поэтому

$$\begin{aligned} 0 < x'_1x'_2 - (y'_1 - x'_1)(y'_2 - x'_2) &= \\ = x_1(2x_2 - y_2) - (y_1 - 2x_1)(y_2 - x_2) &= \\ = x_1x_2 - (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Противоречие.

Замечание. Отметим, что при $x_1 = x_2 = 1$ утверждение задачи превращается в *двухцветную (одномерную) теорему Хелли.*

10.8. Дано натуральное $n > 2$. Маша записывает по кругу n натуральных чисел. Далее Тая делает такую операцию: между каждыми двумя соседними числами a и b она пишет некоторый делитель числа $a + b$, больший 1; затем Тая стирает исходные числа и получает новый набор из n чисел, стоящих по кругу. Всегда ли Тая может выполнять операции таким образом, чтобы через несколько операций все числа оказались равными?

(*Т. Коротченко*)

Ответ. Да.

Решение. Будем наращивать множество ситуаций, в которых Тая побеждает (т.е. сможет получить n равных чисел).

(1) Пусть у нас n нечётных чисел.

Тогда за одну операцию можно получить n двоек.

(2) Пусть никакая сумма двух соседних чисел не является степенью двойки.

Тогда за одну операцию можно получить ситуацию (1).

(3) Пусть среднее арифметическое s всех чисел не равно степени двойки.

Покажем, что сможем прийти к ситуации (2). Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой приведём в конце решения.

Лемма. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные числа, s — их среднее арифметическое. За один ход меняем набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_n+a_1}{2}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ через несколько ходов все числа будут лежать в интервале $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$.*

Ясно, что $s > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы интервал $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ целиком помещался между соседними степенями двойки: $2^{t-1} < s-\varepsilon < s+\varepsilon < 2^t$ для некоторого натурального t. Будем проводить много раз операцию замены пары соседней на их сумму. Тогда, согласно лемме, найдётся N такое, что после N операций все числа будут лежать в интервале $(2^N(s-\varepsilon), 2^N(s+\varepsilon))$, а значит, в интервале между соседними степенями двойки $2^N \cdot 2^{t-1}$ и $2^N \cdot 2^t$. Значит, после $(N-1)$ операции выполнялось условие (2).

(4) Пусть все числа не меньше 2.

Если мы не в ситуации (2), то есть пара соседей a, b, сумма которых равна 2^t, где $t \geqslant 2$ — натуральное. Попробуем сделать следующую операцию произвольно, только a и b заменим на число 2. Пусть в такой попытке мы не пришли в ситуацию (3), то есть получили ситуацию, в которой среднее арифметическое s равно степени двойки. Тогда сделаем другую попытку, в которой все пары меняются так же, только только a и b заменяются на 4. По сравнению с первой попыткой s увеличилось на $\frac{2}{n}$, поэтому мы окажемся в ситуации (3).

(5) Пусть набор исходных чисел произвольный. Тогда после одной операции имеем ситуацию (4).

Доказательство леммы. Сделаем переобозначения, пусть

$s+x_0$, $s+x_1$, $\ldots$, $s+x_n$ — данные числа, так что $x_0+\ldots+x_n=0$. Пусть $M=\max\{|x_0|,\ldots,|x_n|\}$. Ясно, что после хода M не увеличится. Достаточно понять, что что через некоторое количество k ходов этот максимум отклонения станет не более λM для некоторого фиксированного $0<\lambda<1$. Ниже увидим, что можно положить $k=n$ и $\lambda=\frac{2^n-n-1}{2^n}$.

Через n ходов у нас будет набор $s+y_0$, $s+y_1$, $\ldots$, $s+y_n$, где $y_0=\frac{1}{2^n}\left(x_0+C_n^1x_1+C_n^2x_2+\ldots+C_n^{n-1}x_{n-1}+x_n\right)$ и т.д. Так как $x_0+x_1+\ldots+x_n=0$, имеем $x_0+C_n^1x_1+C_n^2x_2+\ldots+ +C_n^{n-1}x_{n-1}+x_n=(C_n^1-1)x_1+(C_n^2-1)x_2+\ldots+(C_n^{n-1}-1)x_{n-1}$. Отсюда $|y_0|\leqslant\frac{1}{2^n}\left((C_n^1-1)+\ldots+(C_n^{n-1}-1)\right)M=\frac{2^n-n-1}{2^n}M$. Аналогично все $|y_i|\leqslant\frac{2^n-n-1}{2^n}M$. $\square$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ 10 КЛАССА		
ЗАДАЧА	**КРИТЕРИЙ**	**БАЛЛ**
10.1	Проблемы со знаком разности прогрессии, не влияющие на решение	Баллы не снимаются
10.1	Без обоснования считается, что разность прогрессии целая	Баллы не снимаются
10.1	Доказано, что разность прогрессии рациональна, или задача сведена к целой разности прогрессии	Баллы не добавляются
10.1	Неверно доказана делимость p-1 на d, и из этого верно выведено утв. задачи	Баллы не добавляются
10.1	В предположении p>q доказано, что в прогрессии встречается p; второе утверждение не доказано	2
10.2	Только полная оценка	**2**
10.2	Только полный пример с обоснованием	**4**
10.2	Отмечено, что в 2x2 должно быть минимум 2 закрашенных клетки, чтобы нельзя было выделить уголок, и есть идея разбиения на непересекающиеся квадраты 2x2, других продвижений нет	1
10.2	В обосновании в целом верного примера используются неверные утверждения.	Штраф 1 балл
10.3	только доказательство достаточности n=2k+1	2
10.3	Утверждается, что для построения примера в случае k=2n достаточно найти пары многочленов (P_1, Q_1) и (P_2,Q_2) такие, что P_1(t)=P_2(t) для n данных точек и P_1(t)=Q_2(t) для n оставшихся точек, других продвижений нет	0 баллов за эту часть
10.3	Замечено только, что можно рассматривать только k=2n (а не k=< 2n)	0 баллов за эту часть
10.3	Обсужден только случай k=2n, случай k<2n не рассмотрен	баллы не снимались
10.3	разбор конкретных значений n	0
10.3	В примере для k=2n некоторые многочлены имеют степень меньше n	снимается 1 балл
10.4	Начальные продвижения, включая достроение до прямоугольного AFB, построение центра (EZT) и понимание, что он на серпере к BD, и т.д.	0
10.4	Огрублено XY<AD	0
10.4	Разные переформулировки, в том числе в терминах прямоугольной гиперболы	0
10.4	Доказано, что XZ = TY (только написанные теоремы Менелая без выводов -- не достаточно для получения балла)	1
10.4	Недоведенный счет (координаты и т.д)	0
10.5	Далее обозначено: Пусть длины прыжков a_0=eps, a_1, ..., a_7 (обычно a_0=eps -- другое по сути число).	
10.5	В работе имеется идея кратного увеличения длин прыжков a_1, a_2, ..., a_7 (например, степени двойки)	1 балл
10.5	В работе имеется идея взять одним из прыжков число меньше 1 (a_0= eps), с помощью которого <<допрыгивать до края дощечки>>.	1 балл
10.5	В работе считается, что длины отрезков --- целые числа	не более 1 балла
10.5	В работе не появляются конкретные неравенства на a_0= eps (например, в работе вместо неравенств написано <<достаточно маленькое>>, <<бесконечно маленькое>>, <<очень маленькое, например, 10^{-100}>> и т.п.)	не более 2 баллов
10.5	Выбирается наибольшее a_i<C и в качестве нужного прыжка берётся a_{i+1}, при этом множество a_i<C может быть пусто.	снимается не менее 1 балла
10.5	В работе верно сформулировано неравенство, которое надо проверить, однако проверка этого неравенства или неверна, или отсутствует	снимается не менее 2 баллов

10.5	В работе a_{i+1} выбирается по ходу выполнения алгоритма как сумма двух длин соседних отрезков, когда a_i уже не хватает. При этом утверждается, что a_{i+1} >= 2a_i. В некоторых работах это неравенство неверно.	снимается не менее 3 баллов
10.6	Только счет углов и переформулировки в терминах углов (в частности, посчитан угол EMF, или если задача сведена к равенству угла EBF и угла 360-2D), достраивание конструкции до "трезубца" и пр.	баллы не добавляются
10.6	(А) Рассмотрение E'B'F' (как в решении А) и сведение задачи к нахождению угла E'B'F' (только переформулировки после гомотетии с центром D не достаточно) (критерий не суммируется с другими)	2 балла
10.6	(B1) задача сведена к изогональности BE и BF отн. ABC (или к эквивалентному равенству углов)	1 балл
10.6	(B1') задача сведена к подобию ABE и CBF(явно указано, что нам нужно подобие, или отношение/произведение соответствующих сторон) (не суммируется с (B1))	2 балла
	(B2) Доказано AE AD = CF CD	1 балл
10.6	(B2') Доказано подобие ABE и CBF (не суммируется с (B2))	2 балла
10.6	Не рассмотрено различное расположение точек, не влияющее на ход решения	не снимаем
10.6	незавершенный счет (в синусах, комплексных, недостаточно положений в "методе движения точек" и пр.)	0
10.7	Введение графа, доказательство ацикличности, структура графа	0
10.7	Оценено количество рёбер	0
10.7	"Причёсывание" задачи: выкидывание изолированных отрезков, продление отрезков и тд	0
10.7	Недоведённый подсчёт всех пар подмножеств из x_1 и x_2 отрезков	0
10.7	Разборы частных случаев: x_1=1, чередуются цвета отрезков, одновременно y_1 >= 2x_1 и y_2 >= 2x_2 и другие	0
10.7	Доказано только, что каждую пару белых отрезков пересекает не более чем один чёрный отрезок	0
10.7	Равносильные преобразования доказываемого неравенства	0
10.7	Рассмотрены циклические сдвиги по x_1 отрезку, недоведённая попытка двойного подсчёта	1
10.8	Сведение задачи к получению всех нечётных чисел	0
10.8	Сведение задачи к случаю, когда суммы соседних чисел не степени 2	0
10.8	Доказано, что можно получить следующую ситуацию: по кругу стоят только двойки и нечетные числа из некоторого отрезка, в котором нет степеней двойки, а также сумма никаких двух чисел не равна степени двойки.	3