

## 10 класс

### Задача №10-Е1. Внутренний объем трубки

Для начала увеличим точность шкалы шприца объемом 20 мл, для этого приклеим к нему бумажную шкалу, совместив 0 шкалы шприца с основным делением бумажной шкалы. Определим цену деления приклеенной шкалы используя деления 0 и 20 мл на шкале шприца. При дальнейших измерениях будем пользоваться наклеенной шкалой. Выдвинем поршень шприца 20 мл до отметки  $V_1$ . Поршень шприца 5 мл вдвинем до упора в крайнее положение. Обратите внимание, что при перемещении поршня этого шприца в крайнее положение ощущается (даже слышен!) легкий толчок («щелчок»). Он объясняется тем, что в этом месте внутренний диаметр шприца на небольшом участке немного увеличен и поршень как бы «фиксируется» в этом положении. Для того, чтобы начать выдвигать поршень из этой точки, необходимо приложить некоторое «избыточное» усилие, которое как следует из дальнейших экспериментов с хорошей точностью является постоянным. Соединим шприцы с помощью прозрачной трубки, плотно надев ее на носик каждого шприца. Начнем плавно вдвигать поршень большого шприца до момента, когда поршень малого шприца под действием избыточного давления в трубке «выскочит» из крайнего положения и тоже придет в движение. Определим объем  $V_2$  большого шприца, при котором это происходит. Пусть поршень в малом шприце приходит в движение при давлении в трубке, превышающем атмосферное давление  $P_0$  на величину  $\Delta P$ . Тогда по закону Бойля-Мариотта

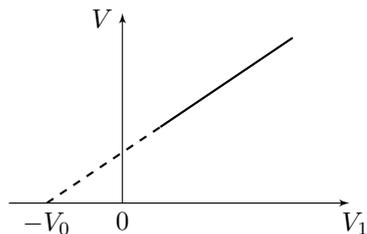
$$P_0(V_1 + V_0) = (P_0 + \Delta P)(V_2 + V_0).$$

Здесь за  $V_0$  обозначен внутренний объем трубки. После преобразований

$$V_1 - V_2 = \frac{\Delta P}{P_0 + \Delta P}(V_1 + V_0).$$

Если теоретическая модель верна, то при построении графика зависимости величины  $\Delta V = V_1 - V_2$  от  $V_1$  мы должны получить линейную зависимость, причем продолжение прямой  $\Delta V(V_1)$  будет пересекать ось  $V_1$  в точке  $V_1 = -V_0$  (см. рисунок).

Для повышения точности каждый опыт проведем три раза с последующим усреднением результатов.

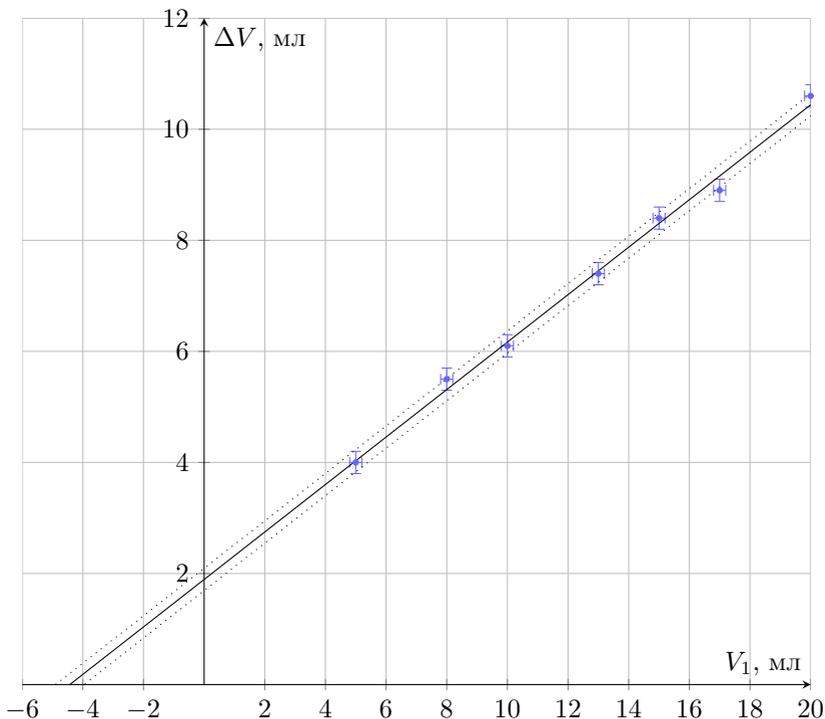


$$\Delta V_{\text{ср}} = V_1 - \frac{V_{2_1} + V_{2_2} + V_{2_3}}{3}$$

Экспериментальные данные

$V_1$ , мл	$V_{21}$ , мл	$V_{22}$ , мл	$V_{23}$ , мл	$\Delta V_{\text{ср}}$ , мл
20.0	9.5	9.3	9.5	10.6
17.0	8.0	8.2	8.0	8.9
15.0	6.5	6.5	6.7	8.4
13.0	5.7	5.5	5.5	7.4
10.0	4.0	3.7	4.0	6.1
8.0	2.5	2.5	2.5	5.5
5.0	1.0	1.0	1.0	4.0

График  $\Delta V_{\text{ср}}(V_1)$ .



Продолжение графика до пересечения с осью абсцисс позволяет определить значение  $V_0 \approx 4.5$  мл.

Оценим погрешность. Погрешность измерения объема равна цене деления  $\Delta V \approx 0.2$  мл. Из серии измерений видно, что разброс значений укладывается в приборную погрешность, то есть  $\Delta V_{\text{приб}} \approx \Delta V_{\text{случ}}$ .

Тогда

$$\Delta V_{\text{полн}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta V_{\text{приб}}}{3}\right)^2 + \Delta V_{\text{случ}}^2} \approx \Delta V_{\text{приб}} = 0.2 \text{ мл}$$

Для оценки погрешности  $V_0$  проведем две вспомогательные прямые, проходящие через края крестов ошибок и показывающие допустимое отклонение в  $V_0$ .

$$\Delta V_0 = \frac{V_{0\text{макс}} - V_{0\text{мин}}}{2} = \frac{5.0 - 3.8}{2} = 0.6 \text{ мл}$$

Окончательный результат  $V_0 = (4.5 \pm 0.6) \text{ мл}$ .

### Задача №10-Е2. Серый ящик

Для начала найдем сопротивления 3, 5 и 6 резисторов. Для этого сделаем следующие опыты:

- Измерим сопротивление  $R_a$  между замкнутыми точками **БД** и замкнутыми точками **ВГ**. Полученная цепь представляет параллельное соединение 3 и 5 резисторов, поэтому  $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}$ .
- Измерим сопротивление  $R_6$  между замкнутыми точками **БГ** и точкой **В**. Полученная цепь представляет параллельное соединение 3 и 6 резисторов, поэтому  $\frac{1}{R_6} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}$ .
- Измерим сопротивление  $R_b$  между замкнутыми точками **ВД** и точкой **Г**. Полученная цепь представляет параллельное соединение 5 и 6 резисторов, поэтому  $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$ . Из первых трех опытов получим:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_b} \right),$$

откуда найдем  $R_3$ , аналогично найдем  $R_5$

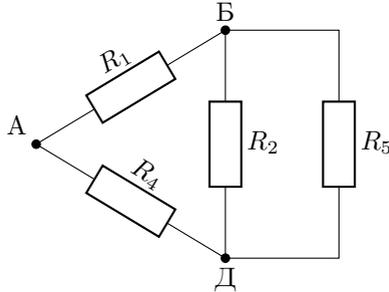
$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_6} \right)$$

и  $R_6$

$$\frac{1}{R_6} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_a} \right).$$

- Теперь соединим вместе точки **Б**, **В** и **Г**. Получим треугольник из резисторов, две стороны треугольника представлены резисторами 1 и 4, а третья — параллельным соединением резисторов 2 и 5. Важно выбрать именно такой вариант, так как измеряя сопротивления между различными парами

выводов можно определить, что сопротивления резисторов 1, 2 и 4 заметно меньше остальных. Для повышения точности к резистору 2 нужно присоединить параллельно максимально сравнимый с ним, то есть обладающий наименьшим сопротивлением из оставшихся. Получим эквивалентную схему:



Дополнительно соединим точки **Б** и **Д** и измерим сопротивление  $R_x$  между ними и точкой **А**.

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}$$

- Вместо **Б** и **Д** соединим **Б** и **А** и измерим сопротивление  $R_y$  между ними и точкой **Д**.

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$$

- Вместо **Б** и **А** соединим **Д** и **А** и измерим сопротивление  $R_z$  между ними и точкой **Б**.

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$$

- Теперь можно вычислить оставшиеся сопротивления.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_y} \right),$$

аналогично

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_z} \right)$$

и

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_z} + \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x} \right) - \frac{1}{R_5}.$$

- Для определения какие выводы нужно соединить, чтобы получить 167 Ом, рассчитаем для каждого резистора величину обратную его сопротивлению и посмотрим какие из них дают в сумме  $\frac{1}{167}$  Ом<sup>-1</sup>. Из полученных значений следует, что идеально подходят  $R_1$  и  $R_2$ . То есть требуется соединить точки **А**, **В**, **Г** и **Д** и измерять сопротивление между ними и точкой **Б**. Также можно заметить, что число очень близкое к 167 Ом, мы получили при измерении  $R_z$ .
- Оценим погрешность. Погрешность измеряемых сопротивлений составляет 1%, тогда и погрешность величин, обратных к измеренным сопротивлениям тоже составляет 1%. Вычислим абсолютные погрешности величин  $1/R$  по формуле  $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\varepsilon(R)}{R}$ . При сложении величин складываются их абсолютные погрешности, поэтому

$$\Delta\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{2} \left( \Delta\left(\frac{1}{R_x}\right) + \Delta\left(\frac{1}{R_y}\right) + \Delta\left(\frac{1}{R_z}\right) \right).$$

Тогда  $\varepsilon(R_1) = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1}\right) = \Delta\left(\frac{1}{R_1}\right) R_1$ , соответственно  $\Delta(R_1) = \Delta\left(\frac{1}{R_1}\right) R_1^2$ . Для остальных сопротивлений погрешность вычисляется аналогично.

Измерения и расчеты (Авторские значение могут отличаться от выданного вам оборудования).

Что измеряли	Значение, кОм	$R^{-1}$ , кОм <sup>-1</sup>	$\Delta(R^{-1})$ , кОм <sup>-1</sup>
$R_a$	12.53	0.0798	0.000798
$R_b$	24.9	0.0402	0.000402
$R_b$	16.69	0.0599	0.000599
$R_x$	0.1239	8.0710	0.080710
$R_y$	0.242	4.1322	0.041322
$R_z$	0.1645	6.0790	0.060790

Что вычислили	Значение, кОм	$\Delta R$ , кОм	Ответ, кОм
$R_1$	0.199	0.004	$0.199 \pm 0.004$
$R_2$	0.979	0.09	$0.98 \pm 0.09$
$R_3$	33.5	1.0	$34 \pm 1$
$R_4$	0.326	0.01	$0.33 \pm 0.01$
$R_5$	20.5	0.4	$20.5 \pm 0.4$
$R_6$	97.1	8	$97 \pm 8$

Как видно из таблицы наименьшим сопротивлением обладает первый резистор.

Шифр

 $\Sigma$ **10-Е1. Внутренний объем трубки**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Идея измерения объема с использованием уравнения состояния идеального газа.	2.0		
2	Идея использования бумажной шкалы для уточнения шкалы шприца.	1.0		
3	Использование одного и того же начального положения поршня шприца, по которому ловится момент сдвига.	2.0		
4	Использование «нулевого» положения в качестве начального для поршня шприца, по которому ловится момент сдвига.	2.0		
5	Для каждого объема $V_1$ выполнена серия не менее, чем из 3 экспериментов, и в работе присутствуют значения $V_2$ для каждого эксперимента из серии.	1.0		
6	Количество разных значений $V_1$ . По 0.5 за точку, но не более 3.5.	7 точек по 0.5		
7	Записано уравнение состояния идеального газа.	1.0		
8	Получена расчетная формула, позволяющая определить внутренний объем трубки.	2.0		

	<b>Проверена работоспособность выбранной модели.</b>			
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Вариант 1.</b> Построен линеаризованный график. В этом случае построение графика оценивается в пунктах 9-12.</li> <li>● <b>Вариант 2.</b> Объем трубки вычислен для каждого опыта и явным образом указано, что значения получаются примерно равными или при усреднении осуществлен отброс явно выбивающихся значений. В этом случае баллы за пункты 9-12 ставятся в полном объеме. Аналогично оцениваются иные методы, позволяющие подтвердить корректность выбранной модели.</li> <li>● <b>Вариант 3.</b> Обработка данных производилась методом МНК. В этом случае баллы за пункты 9-12 НЕ ставятся, так как из МНК нельзя сделать вывод о работоспособности модели. Аналогично оцениваются иные методы, НЕ позволяющие подтвердить корректность выбранной модели.</li> </ul>			
9	График: размер и подпись осей	0.5		
10	График: оцифровка осей	0.5		
11	График: нанесение точек	0.5		
12	График: линия графика	0.5		
13	Значение объема в пределах 15% от истинного значения — в пределах 30% от истинного значения	2.5  1.0		
14	Оценка погрешности	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Е2. Серый ящик

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Определено, что наименьшим сопротивлением обладает резистор $R_1$ . Вывод сделан либо из рассчитанных сопротивлений, либо указано, что при подсоединении к точкам А и Б мультиметр показал наименьшее сопротивление среди всех пар точек, откуда следует, что у первого резистора сопротивление наименьшее (доказательство этого факта не требуется)	2.0		
1.2	Предложен реализуемый метод определения сопротивлений всех резисторов с погрешностями менее 50%. — Если метод позволяет определить только сопротивления трех, четырех или пяти резисторов с погрешностями не более 50%, то 2 балла.	4.0  2.0		
1.3	Выполнены измерения сопротивлений при разных вариантах подключения (не менее 6)	1.0		
1.4	Выведены формулы для связи измеренного сопротивления с сопротивлениями резисторов внутри «серого ящика» как минимум для 3 разных вариантов подключения.	1.0		
1.5	Получены правильные расчетные формулы для сопротивлений резисторов внутри «серого ящика». — Если формулы получены не для всех резисторов, но не менее, чем для трех, то 1 балл.	3.0  1.0		
1.6	Получены значения сопротивлений резисторов, отличающиеся от истинных не более, чем на 7% для резисторов №№ 1, 3, 4 и 5 и не более, чем на 18% для резисторов №№ 2 и 6. По 1 баллу за каждое правильное значение. (Максимум 6 баллов.)	6 точек по 1.0		
1.7	Указана верная схема соединения выводов «серого ящика», позволяющая получить сопротивление $(167 \pm 5)$ Ом.	2.0		
1.8	Погрешность корректно оценена.	1.0		