

Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике для 6 класса

2021/22 учебный год

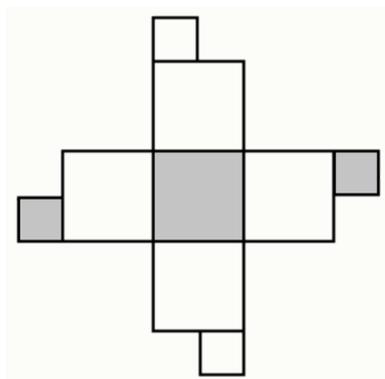
Максимальное количество баллов — 8

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание

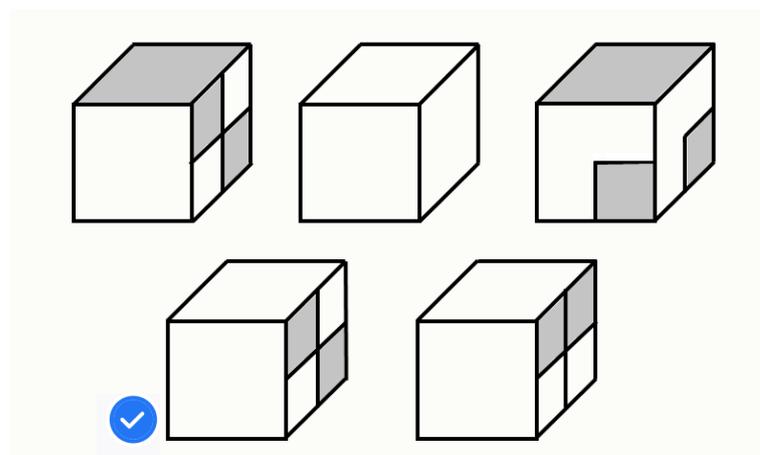
Задача № 1.

1.1. Условие:

Какой кубик можно сделать из этой развёртки?



Ответ:

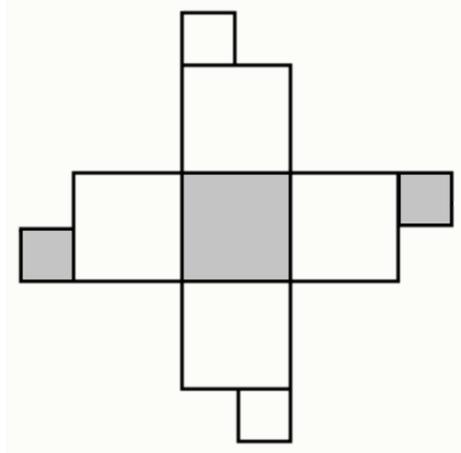


Решение.

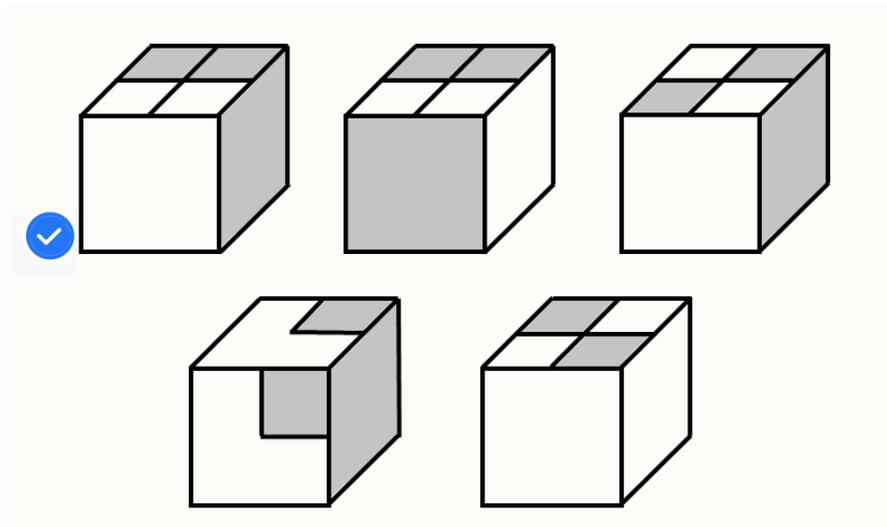
Заметим, что при такой раскраске на одной грани из четырёх маленьких квадратиков должна получиться «шахматная» раскраска, так что третий и пятый варианты (т.е. крайние справа в обоих рядах) точно не подходят. Также заметим, что у нас нет трёх пустых граней, образующих угол, показанный во втором варианте, поскольку тогда чёрная и «шахматная» грань должны были бы иметь общую сторону, что противоречит развёртке. По этой же причине первый вариант тоже не подходит. Остаётся только четвёртый вариант. В таком кубике напротив «шахматной» грани располагается чёрная, а на остальные две (невидимые) приходятся пустые грани.

1.2. Условие:

Какой кубик можно сделать из этой развёртки?

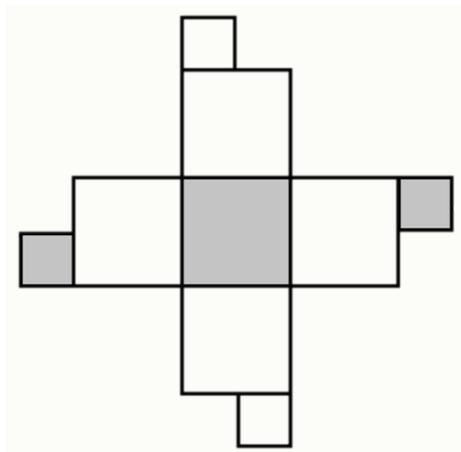


Ответ:

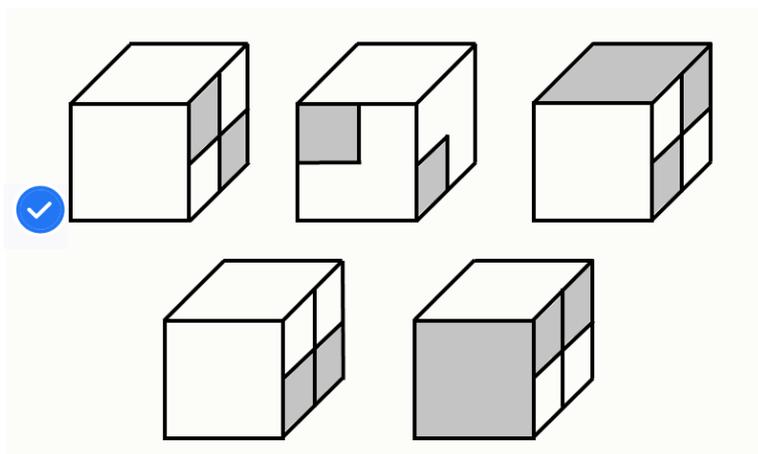


1.3. Условие:

Какой кубик можно сделать из этой развёртки?

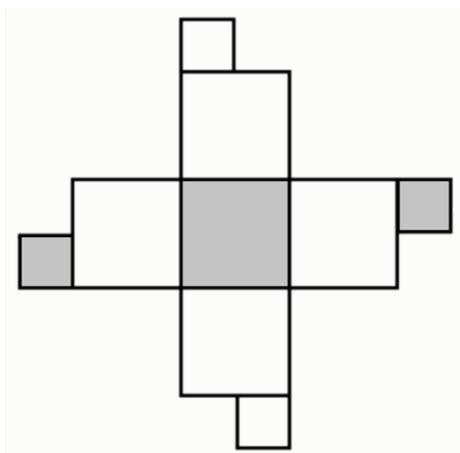


Ответ:

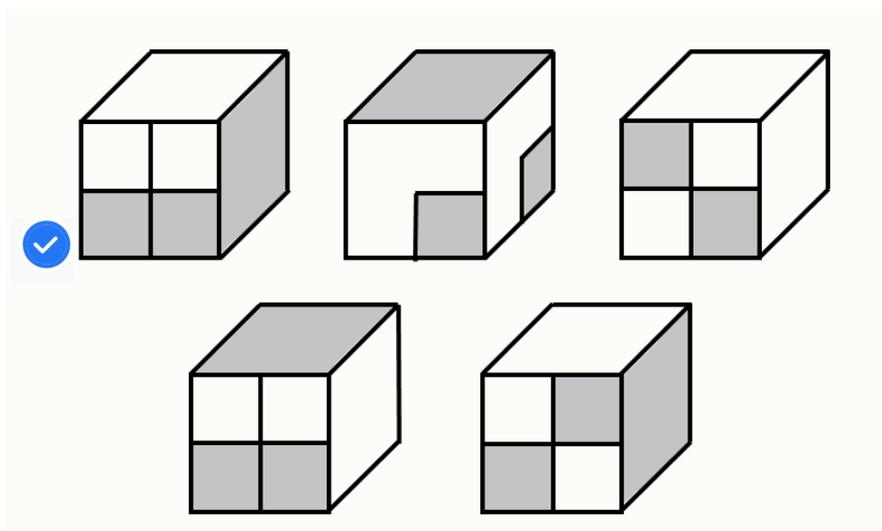


1.4. Условие:

Какой кубик можно сделать из этой развёртки?



Ответ:



Задача № 2

2.1. Условие:

В кампусе комнаты нумеруются подряд 1, 2, 3, 4..., 10, 11,... Для нумерации комнат были закуплены наклейки с цифрами, при этом цифр 1, 2 и 3 закуплено поровну, а цифр 5 — на три больше, чем цифр 6. Сколько комнат в кампусе, если известно, что их менее 100?

Ответ: 66

Решение.

В каждой десятке до шестого цифр «5» и «6» поровну, то есть комнат не менее 50. Так как цифр «1», «2» и «3» поровну, они точно должны встречаться в каждой десятке, а значит, число комнат составит хотя бы 53. Тогда цифр «5» окажется на четыре больше, чем цифр «6». Значит, минимальное число комнат достигнет уже 60, а цифр «5» будет на десять больше, чем цифр «6», так как пятёрка всего 11 среди чисел от 50 до 59 (однако учтём одну цифру «6» в числе 56). Среди чисел от 60 до 66 будет семь цифр «6» и одна цифра «5», то есть разница уменьшится на 6, и число цифр «5» превысит число цифр «6» ровно на четыре. Заметим, что дальше разница количества цифр «5» и «6» будет уменьшаться, пока их число не сравняется по достижении номера 69. Если брать номера из следующих десятков, то разница количества цифр «5» и «6» не превысит единицы по достижении номеров 75, 76 или 85, 86 или 95, 96. То есть ответ только один.

2.2. Условие:

В кампусе комнаты нумеруются подряд 1, 2, 3, 4..., 10, 11, ... Для нумерации комнат были закуплены наклейки с цифрами, при этом цифр 1, 2, 3 и 4 закуплено поровну, а цифр 7 — на четыре больше, чем цифр 8. Сколько комнат в кампусе, если известно, что их менее 100?

Ответ: 85

2.3. Условие:

В кампусе комнаты нумеруются подряд 1, 2, 3, 4..., 10, 11, ... Для нумерации комнат были закуплены наклейки с цифрами, при этом цифр 1 и 2 закуплено поровну,

а цифр 6 — на семь больше, чем цифр 7. Сколько комнат в кампусе, если известно, что их менее 100?

Ответ: 72

2.4. Условие:

В кампусе комнаты нумеруются подряд 1, 2, 3, 4..., 10, 11, ... Для нумерации комнат были закуплены наклейки с цифрами, при этом цифр 1, 2, 3 закуплено поровну, а цифр 8 — на три больше, чем цифр 9. Сколько комнат в кампусе, если известно, что их менее 100?

Ответ: 96

Задача № 3

3.1. Условие:

Ваня купил шарики, красных было в 7 раз больше, чем синих. Пока Ваня шёл домой, часть шариков лопнула, причём среди лопнувших шариков красных оказалось в 3 раза меньше, чем синих. Какое наименьшее количество шариков мог купить Ваня?

Ответ: 24

Решение.

Заметим, что лопнул хотя бы один красный шарик, а значит, синих лопнуло хотя бы три. Отсюда синих шариков не меньше трёх, следовательно, красных не меньше $7 \cdot 3 = 21$, то есть всего шариков должно быть хотя бы 24. Например, Ваня мог нести с собой 21 красный шарик и 3 синих, а лопнул 1 красный шарик и все 3 синих.

3.2. Условие:

Ваня купил шарики, красных было в 5 раз больше, чем синих. Пока Ваня шёл домой, часть шариков лопнула, причём среди лопнувших шариков красных оказалось в 3 раза меньше, чем синих. Какое наименьшее количество шариков мог купить Ваня?

Ответ: 18

3.3. Условие:

Ваня купил шарики, красных было в 7 раз больше, чем синих. Пока Ваня шёл домой, часть шариков лопнула, причём среди лопнувших шариков красных оказалось в 4 раза меньше, чем синих. Какое наименьшее количество шариков мог купить Ваня?

Ответ: 32

3.4. Условие:

Ваня купил шарики, красных было в 6 раз больше, чем синих. Пока Ваня шёл домой, часть шариков лопнула, причём среди лопнувших шариков красных оказалось в 5 раз меньше, чем синих. Какое наименьшее количество шариков мог купить Ваня?

Ответ: 35

Задача № 4

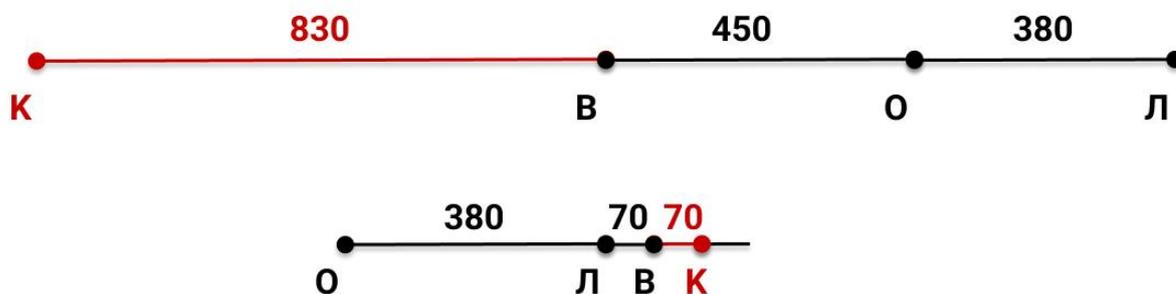
4.1. Условие:

Ласточка, воробей и канарейка сели на три столба вдоль шоссе. Ласточка опустилась на столб, расположенный в 380 м от автобусной остановки; воробей — на столб, который находится в 450 м от остановки, прямо посередине между ласточкой и канарейкой. На каком расстоянии от остановки находится столб, на который села канарейка? Ответ выразите в метрах, укажите все возможные варианты.

Ответ: 520, 1280

Решение.

Раз воробей находится ровно посередине, то расстояние между ним и ласточкой равно расстоянию между ним и канарейкой. Расстояние между воробьём и ласточкой составляет $450 - 380 = 70$ метров (если птицы сидят по одну сторону от остановки) либо же $450 + 380 = 830$ метров (если птицы сидят по разные стороны от остановки). Тогда канарейка сидит на расстоянии $450 + 70 = 520$ метров (по одну сторону от остановки) и $450 + 830 = 1280$ метров (по разные стороны от остановки).



4.2. Условие:

Ласточка, воробей и канарейка сели на три столба вдоль шоссе. Ласточка опустилась на столб, расположенный в 400 м от автобусной остановки; воробей — на столб, который находится в 635 м от остановки, прямо посередине между ласточкой и канарейкой. На каком расстоянии от остановки находится столб, на который села канарейка? Ответ выразите в метрах, укажите все возможные варианты.

Ответ: 870 и 1670

4.3. Условие:

Ласточка, воробей и канарейка сели на три столба вдоль шоссе. Ласточка опустилась на столб, расположенный в 530 м от автобусной остановки; воробей — на столб, который находится в 410 м от остановки, прямо посередине между ласточкой и канарейкой. На каком расстоянии от остановки находится столб, на который села канарейка? Ответ выразите в метрах, укажите все возможные варианты.

Ответ: 290 и 1350

4.4. Условие:

Ласточка, воробей и канарейка сели на три столба вдоль шоссе. Ласточка опустилась на столб, расположенный в 485 м от автобусной остановки; воробей — на столб, который находится в 420 м от остановки, прямо посередине между ласточкой и канарейкой. На каком расстоянии от остановки находится столб, на который села канарейка? Ответ выразите в метрах, укажите все возможные варианты.

Ответ: 355 и 1325

Задача № 5

5.1. Условие:

В понедельник Оля начала тренироваться по следующей программе: 6 дней подряд идут тренировки, потом 2 дня отдыха, потом снова 6 дней тренировок, 2 дня отдыха и т.д. На какой день недели выпадет сотая по счёту тренировка?

Варианты ответов:

- Понедельник
- Вторник
- Среда
- Четверг
- Пятница
- Суббота
- Воскресенье

Решение.

Попробуем понять, на какой цикл программы (т. е. отрезок из 8 дней, состоящий из 6 дней тренировок и 2 дней отдыха) выпадает сотая тренировка (не сотый день программы). Разделив 100 на 6, узнаем, сколько циклов должно пройти до наступления сотой тренировки – 16 и 4 в остатке. Это значит, что 16 циклов будут полными и ещё четыре тренировочных дня пройдёт до наступления сотого дня тренировок: $16 \cdot (6 + 2) + 4 = 132$ дня. Чтобы найти день недели, нужно посмотреть на остаток числа при делении на 7. При делении 132 на 7 получаем в остатке 6, а значит, день недели – суббота.

5.2. Условие:

В понедельник Оля начала тренироваться по следующей программе: 3 дня подряд идут тренировки, потом 1 день отдыха, потом снова 3 дня тренировок, 1 день отдыха и т.д. На какой день недели выпадет сотая по счёту тренировка?

Варианты ответов:

- Понедельник
- Вторник
- Среда
- Четверг

- Пятница
- Суббота
- Воскресенье

5.3. Условие:

В понедельник Оля начала тренироваться по следующей программе: 7 дней подряд идут тренировки, потом 3 дня отдыха, потом снова 7 дней тренировок, 3 дня отдыха и т.д. На какой день недели выпадет сотая по счёту тренировка?

Варианты ответов:

- Понедельник
- Вторник
- Среда
- Четверг
- Пятница
- Суббота
- Воскресенье

5.4. Условие:

В понедельник Оля начала тренироваться по следующей программе: 8 дней подряд идут тренировки, потом 3 дня отдыха, потом снова 8 дней тренировок, 3 дня отдыха и т.д. На какой день недели выпадет сотая по счёту тренировка?

Варианты ответов:

- Понедельник
- Вторник
- Среда
- Четверг
- Пятница
- Суббота
- Воскресенье

Задача № 6

6.1. Условие:

Петя задумал натуральное число и выписал на доску суммы каждой пары его цифр. После этого он стёр некоторые суммы, и на доске остались числа 2, 0, 2, 2. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

Ответ: 2000

Решение.

Так как среди сумм есть 0, в числе должно быть хотя бы две цифры 0. Если в числе всего три цифры, то получится три попарных суммы, а по условию их хотя бы четыре. Значит, в искомом числе должно быть хотя бы четыре цифры. Получить сумму, равную 2, можно либо как $1 + 1$, либо как $2 + 0$. Если в числе есть цифра 2, то в нём окажутся четыре цифры, три из которых – 2, 0, 0, а значит, меньше 2000 число быть не может. При этом 2000 отвечает условию. Если же 2 получить как $1 + 1$, то потребуется хотя бы четыре цифры – 1, 1, 0, 0. При этом с их помощью не удастся получить попарные суммы 2, 0, 2, 2, а значит, цифр должно быть хотя бы 5, т. е. число точно будет больше 2000.

6.2. Условие:

Петя задумал натуральное число и выписал на доску суммы каждой пары его цифр. После этого он стёр некоторые суммы, и на доске остались числа 1, 1, 1, 2. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

Ответ: 1001

6.3. Условие:

Петя задумал натуральное число и выписал на доску суммы каждой пары его цифр. После этого он стёр некоторые суммы, и на доске остались числа 18, 16, 16, 16. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

Ответ: 7799

6.4. Условие:

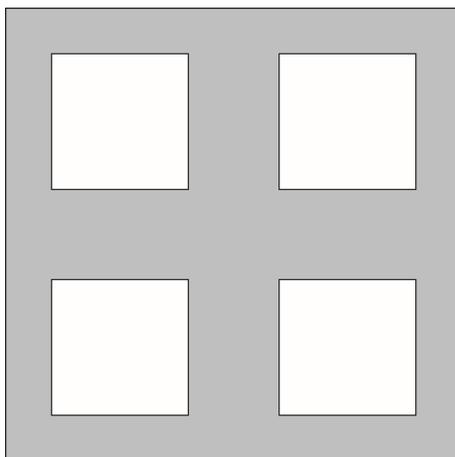
Петя задумал натуральное число и выписал на доску суммы каждой пары его цифр. После этого он стёр некоторые суммы, и на доске остались числа 17, 17, 17, 16. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

Ответ: 8889

Задача № 7

7.1. Условие:

Столяр взял деревянный квадрат и выпилил из него 4 равных квадратика поменьше, площадь каждого из которых составила 9% от площади большого. Оставшаяся от первоначального квадрата площадь равнялась 256 см^2 .



Найдите сторону первоначального квадрата. Ответ выразите в сантиметрах.

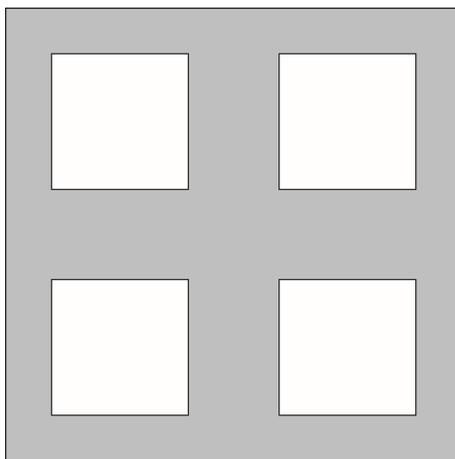
Ответ: 20

Решение.

Пусть сторона большого квадрата равна $10x$. Площадь маленького квадрата составляет 9% от площади большого, то есть $9/100 \cdot 100x^2 = 9x^2$. После того как убрали четыре маленьких квадрата, по условию осталось $100x^2 - 4 \cdot 9x^2 = 64x^2 = 256 \text{ см}^2$. Значит, $x^2 = 4$. Отсюда $x = 2 \text{ см}$, а вся сторона $10x = 20 \text{ см}$.

7.2. Условие:

Столяр взял деревянный квадрат и выпилил из него 4 равных квадратика поменьше, площадь каждого из которых составила 10% от площади большого. Оставшаяся от первоначального квадрата площадь равнялась 540 см^2 .

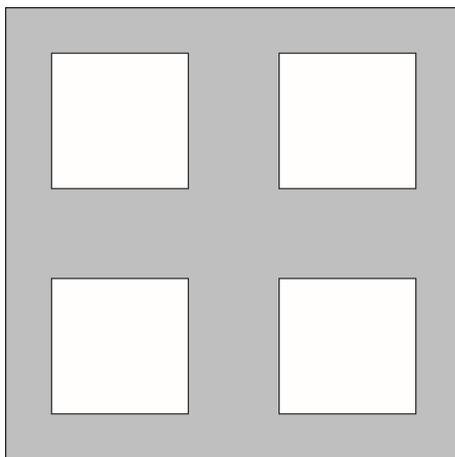


Найдите сторону первоначального квадрата. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 30

7.3. Условие:

Столяр взял деревянный квадрат и выпилил из него 4 равных квадратика поменьше, площадь каждого из которых составила 20% от площади большого. Оставшаяся от первоначального квадрата площадь равнялась 500 см^2 .

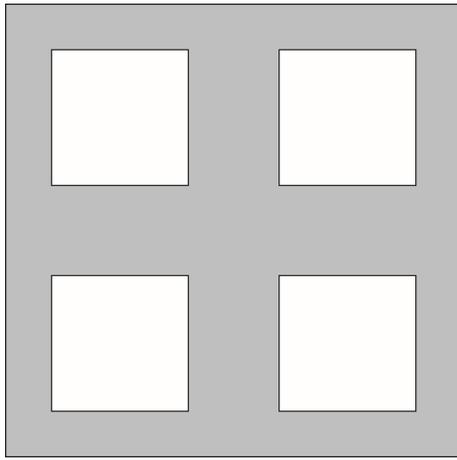


Найдите сторону первоначального квадрата. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 50

7.4. Условие:

Столяр взял деревянный квадрат и выпилил из него 4 равных квадратика поменьше, площадь каждого из которых составила 17% от площади большого. Оставшаяся от первоначального квадрата площадь равнялась 512 см^2 .



Найдите сторону первоначального квадрата. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 40

Задача № 8

8.1. Условие:

На острове обитают два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Шестеро островитян выстроились в шеренгу на расстоянии 1 м друг от друга.

- Самый левый в ряду сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 3 м от меня».
- Четвёртый сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 1 м от меня».
- Пятый сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 2 м от меня».

Известно, что всего в шеренге три рыцаря и три лжеца. На каких местах **гарантированно** стоят рыцари?

Ответ:



Решение.

Пронумеруем всех островитян слева направо. Пусть четвёртый – лжец. Тогда третий и пятый должны быть рыцарями, иначе бы четвёртый сказал правду.

Если первый – лжец, то его утверждение ложно только в том случае, когда второй тоже является лжецом. Так как всего лжецов трое, получается, что шестой – рыцарь, но тогда пятый солгал, ведь его ближайший соплеменник находится на расстоянии 1 м, а не 2 м. Если же первый – рыцарь, то его утверждение опять будет ложно, чего тоже быть не может. Получается, что четвёртый точно не лжец. Отсюда следует, что рыцарем является третий либо пятый. Если это пятый, то третий тоже рыцарь, возникает такое же противоречие, что и в случае с первым. Значит, третий и четвёртый всегда рыцари, а пятый – лжец. Отсюда также следует, что если первый – рыцарь, то его ближайший соплеменник стоит на расстоянии 2 м (третий), а не 3 м, следовательно, первый – лжец.

Первый, второй и шестой могут быть лжецами, например: ЛЛРРЛР, ЛРРРЛЛ. Здесь первая буква обозначает первого, вторая – второго и т. д.

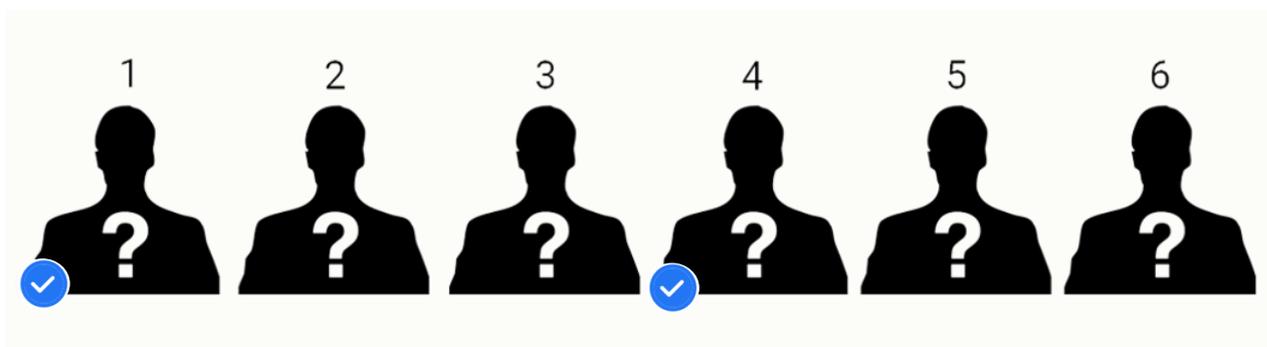
8.2. Условие:

На острове обитают два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Шестеро островитян выстроились в шеренгу на расстоянии 1 м друг от друга.

- Самый левый в ряду сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 3 м от меня».
- Четвёртый сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 1 м от меня».
- Пятый сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 2 м от меня».

Известно, что всего в шеренге три рыцаря и три лжеца. На каких местах гарантированно стоят лжецы?

Ответ:



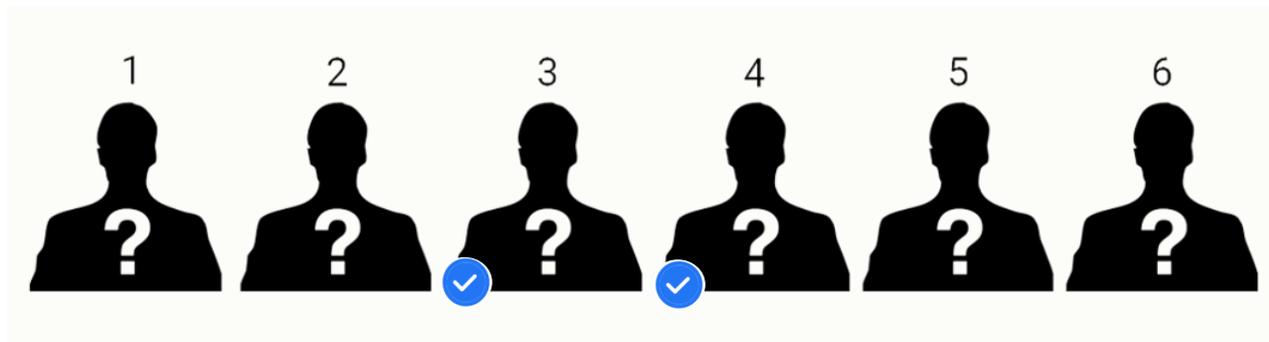
8.3. Условие:

На острове обитают два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Шестеро островитян выстроились в шеренгу на расстоянии 1 м друг от друга.

- Второй слева в ряду сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 2 м от меня».
- Третий сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 1 м от меня».
- Шестой сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 3 м от меня».

Известно, что всего в шеренге три рыцаря и три лжеца. На каких местах **гарантированно** стоят рыцари?

Ответ:



Решение.

Пронумеруем всех островитян слева направо. Пусть третий – лжец. Тогда второй и четвёртый должны быть рыцарями, иначе бы третий сказал правду. Второй – рыцарь, а значит, он говорит правду, и его ближайший соплеменник стоит на месте с номером 4. Но это также значит, что первый – лжец, иначе он был бы рыцарем, стоящим ближе ко второму. Шестой не может быть рыцарем, поскольку тогда он бы солгал, так как третий – лжец и не может быть его соплеменником. Значит, шестой – лжец. Но чтобы он солгал, его соплеменник должен стоять ближе к шестому, чем третий. Так как четвёртый уже рыцарь, остаётся только пятый. Возникает противоречие: в ряду четыре лжеца – первый, третий, пятый и шестой.

Значит, третий точно рыцарь. Из его утверждения следует, что среди второго и четвёртого есть хотя бы один рыцарь. Второй не может быть рыцарем, поскольку тогда его ближайшим соплеменником был бы третий, который стоит рядом с ним, а второй говорит про четвёртого. Значит, второй точно лжец, а четвёртый точно рыцарь.

Если шестой – рыцарь, то его ближайший соплеменник – четвёртый, но шестой говорит про третьего. Возникшее противоречие свидетельствует о том, что шестой точно лжец. Про первого и пятого точно нельзя ничего сказать, так как условию отвечают расстановки ЛЛРРРЛ и РЛРРЛЛ.

8.4. Условие:

На острове обитают два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Шестеро островитян выстроились в шеренгу на расстоянии 1 м друг от друга.

- Второй слева в ряду сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 2 м от меня».
- Третий сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 1 м от меня».
- Четвертый сказал: «Мой ближайший соплеменник в этой шеренге стоит на расстоянии 3 м от меня».

Известно, что всего в шеренге три рыцаря и три лжеца. На каких местах **гарантированно** стоят лжецы?

Ответ:

