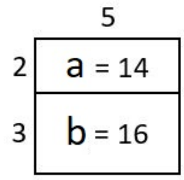
Задача 1. Разделённый квадрат

Тимофей разделил квадрат на два прямоугольника и вычислил их периметры a и b . По этим значениям восстановите сторону исходного квадрата.



Ответом на эту задачу является некоторое выражение, которое может содержать целые числа, переменные a и b (обозначаются соответствующими английскими буквами), операции сложения (обозначаются $+$), вычитания (обозначаются -), умножения (обозначаются *), деления (обозначаются /) и круглые скобки. Запись вида $2a$ для обозначения произведения числа 2 и переменной a некорректна, нужно писать $2 * a$.

Ваше выражение должно давать правильный ответ для любых подходящих натуральных значений a и b. Например, для приведённых на рисунке $a = 14$ и $b = 16$ значение выражения должно быть равно 5.

Пример правильной формы записи ответа:

$$a * a - b * b + (a - b)$$

Задача 2. Сложение

Сложение чисел «в столбик» изучают на простых примерах. Но даже сложение многозначного числа с однозначным может быть непростой задачей, потому что при этом происходит перенос в старший разряд, и могут измениться все цифры числа, а не только последняя.

Оксана прибавляет к числу его последнюю цифру. Назовём такое действие «операцией». К полученному числу она прибавляет его последнюю цифру, затем прибавляет к результату его последнюю цифру и т.д. Оксана начинает с числа 1 и после первой операции получает 2, после второй — 4, после третьей — 8, после четвёртой — 16, после пятой — 22 (потому что $16 + 6 = 22$).

Ответьте на следующие вопросы. Во всех случаях выполнение операций начинается с числа 1.

1. Какое число получится после выполнения 15 операций?
2. Сколько операций нужно выполнить, чтобы получить число 2022?
3. Сколько трёхзначных чисел будет в этой последовательности, если выполнять операции достаточно долго?
4. Какое наибольшее семизначное число можно получить, выполняя эти операции?
5. Начало этой последовательности напоминает ряд степеней двойки: 1, 2, 4, 8, 16... Но некоторые степени (например, число 32) в результате выполнения этих операций получить не удастся. Запишите наименьшее число, являющееся степенью числа 2 и большее числа 32, которое также нельзя получить.

Задача 3. Микроволновая печь

У микроволновой печи есть табло, на котором отображается время приготовления пищи, круглая ручка, которую можно крутить вправо или влево, изменяя продолжительность работы, и одна кнопка.

Если поворачивать ручку вправо, то время на табло будет увеличиваться, а если поворачивать влево — уменьшаться. Величина изменения значения при повороте ручки зависит от того, какое время показывает табло в настоящий момент.

Если табло показывает меньше 30 секунд, то при повороте ручки значение изменится на 1 секунду. Если на табло от 30 до 59 секунд, то при повороте ручки значение изменится на 5 секунд. Если на табло не меньше 60 секунд и меньше 2 минут, то при повороте ручки значение изменится на 10 секунд. Наконец, если на табло 2 минуты и больше, то при повороте ручки значение изменится на 1 минуту. При этом время не может стать отрицательным, то есть если на табло горит 0 секунд, то при повороте ручки влево останется 0 секунд.

При нажатии на кнопку к времени, указанном на табло, всегда прибавляется ровно 30 секунд.

Поворот ручки вправо будем обозначать знаком «+», поворот ручки влево — знаком «-», а нажатие на кнопку — знаком «#».

Например, последовательность действий «#+#-» будет выполняться так. Сначала на табло горит 0. После нажатия на кнопку получилось 30 секунд. После поворота ручки вправо — 35 секунд. После нажатия на кнопку — 1 минута 5 секунд, после поворота ручки влево — 55 секунд.

Разные блюда нужно готовить в микроволновке разное время. Для каждого из указанных времён определите **кратчайшую последовательность** действий, позволяющую установить необходимую продолжительность работы; начальным временем на табло примите 0. Ответом на каждый вопрос является последовательность, содержащая только символы «+», «-» и «#». Если на какой-то вопрос существует несколько лучших ответов, то вы можете указать любой из них.

1. 37 секунд.
2. 3 минуты.
3. 3 минуты 17 секунд.
4. 3 минуты 19 секунд.
5. 4 минуты 57 секунд.

Задача 4. Субботник

Активисты расчищают берег реки от мусора. Всего на субботник вышло 100 активистов. Им осталось только убрать старые брёвна, принесённые течением.

Одно бревно перетаскивает бригада, в которой может быть два и более человек. Если люди в бригаде имеют разный рост, переносить бревно неудобно. Назовём *неудобством бригады* разность между ростом самого высокого и самого низкого человека в бригаде. Рост и значение неудобства мы будем измерять в миллиметрах. Назовём *неудобством разбиения* наибольшее значение неудобства для всех бригад, входящих в разбиение.

Необходимо сформировать бригады таким образом, чтобы неудобство разбиения было минимальным.

Например, пусть в субботнике участвует четыре активиста ростом 1600, 1750, 1650 и 1850 мм и их нужно разбить на две бригады по два человека в каждой. Это можно сделать разными способами. Например, если одну бригаду составить из людей ростом 1600 и 1750 мм, а в другую — из 1650 и 1850 мм, то в первой бригаде неудобство будет 150 мм, а во второй бригаде — 200 мм. Неудобство разбиения в этом случае будет 200 мм. Но если в первую бригаду направить людей ростом 1750 и 1850 мм, а во вторую бригаду — 1600 и 1650 мм, то неудобство разбиения будет равно 100 мм, что лучше.

Вам дан файл, содержащий значения роста 100 активистов, участвующих в субботнике. Вы можете скачать этот файл в разных форматах.

subbotnik.txt — текстовый файл.

subbotnik.xls — электронная таблица Microsoft Excel.

subbotnik.ods — электронная таблица Libre Office Calc.

Ответьте на следующие вопросы. Для ответа на вопросы вы можете использовать программу для работы с электронными таблицами (Microsoft Excel, Libre Office Calc), язык программирования или любые другие средства компьютера.

1. Пусть все участники субботника объединены в одну бригаду. Чему будет равно неудобство такой бригады?

2. Пусть активистов нужно разделить на 2 бригады по 50 человек в каждой. Какое будет минимально возможное значение такого разбиения?

3. Пусть активистов нужно разделить на 10 бригад по 10 человек в каждой. Какое будет минимально возможное неудобство такого разбиения?

4. Чтобы отнести последнее бревно, требуется бригада из 10 человек. Необходимо выбрать 10 человека из 100 так, чтобы составить бригаду с минимально возможным неудобством. Чему будет равно неудобство этой бригады?

Задача 5. Том Сойер

Ограничение по времени: 1 секунда

Одного только не хватало мистеру Уолтерсу для полного счастья: возможности вручить наградную Библию и похвастать чудом учёности. У некоторых школьников имелись жёлтые билетики, но ни у кого не было столько, сколько надо, — он уже опросил всех первых учеников. И в ту самую минуту, когда всякая надежда покинула его, вперёд выступил Том Сойер с девятью жёлтыми билетиками, девятью красными и десятью синими и потребовал себе Библию.

Марк Твен, «Приключения Тома Сойера».

Для получения одной награды нужно предъявить 10 жёлтых билетиков. 10 красных билетиков можно заменить на один жёлтый. 10 синих билетиков можно заменить на один красный. У Тома сейчас y жёлтых билетиков, r красных и b синих. Сколько наград Том может получить?

Формат входных данных

Три строки входного файла содержат три натуральных числа: y, r и b. Все числа не превосходят 2×10^9.

Формат выходных данных

Выведите одно неотрицательное целое число — количество наград, которые может получить Том. В записи этого числа не должно быть десятичной точки, то есть вывод «1.0» вместо «1» является неправильным.

Система оценки

Решения, верно работающие при $b = r = 0$, будут оцениваться в 10 баллов.

Решения, верно работающие при $b = 0$, будут оцениваться в 30 баллов.

Решения, верно работающие при $y, r, b \leqslant 10^5$, будут оцениваться в 55 баллов.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
9 9 10	1

Замечание

Пример из условия соответствует эпиграфу. Том обменяет 10 синих билетиков на 1 красный, после чего у него станет $9+1 = 10$ красных билетиков. Далее он обменяет эти 10 красных билетиков на 1 жёлтый, и у него станет $9 + 1 = 10$ жёлтых билетиков. В конце он обменяет эти 10 жёлтых билетиков на одну награду.

Задача 6. Прогрессия

Ограничение по времени: 1 секунда

> Если цифры составляют часть системы символов, в них обычно заметен некий смысл, например, они являются математической прогрессией или определённой комбинацией, то есть каким-то образом связаны друг с другом.
>
> Дэн Браун, «Код да Винчи»

Зайдя в класс, Вова увидел на доске три числа, записанные в ряд. Он не заметил никакой взаимосвязи между ними, и ему сказали, что изначально чисел было четыре и разности между четвертым и третьим, третьим и вторым, вторым и первым равнялись друг другу. Иными словами, на доске была записана *арифметическая прогрессия* из четырех чисел. Однако затем одно из чисел с доски стерли.

Помогите Вове придумать и дописать на доску какое-нибудь число так, чтобы описанное условие снова начало выполняться.

Формат входных данных

Программа получает на вход три целых положительных числа, не превосходящих 10^5 каждое, по одному в строке, в том порядке, в котором они шли на доске.

Формат выходных данных

В первой строке выведите число, которое Вове необходимо написать. Можно доказать, что это число обязательно должно быть целым. В записи этого числа не должно быть десятичной точки, то есть вывод «13.0» вместо «13» является неправильным.

Во второй строке выведите целое число от 1 до 4 — место, на которое его необходимо написать. 1 означает, что указанное число необходимо выписать перед первым из трех приведенных во входных данных чисел, 2 — между первым и вторым, 3 — между вторым и третьим и 4 — после третьего числа.

Гарантируется, что входные данные таковы, что существует хотя бы один способ дополнить их до арифметической прогрессии. Если подходящих способов несколько, выведите любой из них.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
10 16 19	13 2

Замечание

В примере из условия Вова увидел на доске числа 10, 16 и 19. Если он напишет на доску между первым и вторым из них число 13, то в получившейся четверке чисел 10 13 16 19 разность между четвертым и третьим $(19 - 16)$, третьим и вторым $(16 - 13)$ и вторым и первым $(13 - 10)$ окажется одна и та же, поэтому эта четверка будет арифметической прогрессией.

Задача 7. Расклейка афиш

Ограничение по времени: 1 секунда

С утра по Васюкам ходил высокий худой старик в золотом пенсне и в коротких, очень грязных, испачканных клеевыми красками сапогах. Он наклеивал на стены рукописные афиши.

И.Ильф, Е.Петров. «Двенадцать стульев».

Ипполит Матвеевич Воробьянинов ходит вдоль улицы из n домов, пронумерованных числами от 1 до n, и расклеивает афиши. Сначала он наклеил афиши на каждый дом, номер которого делился без остатка на a. Поскольку афиш осталось еще много, вторым проходом он наклеил афиши на каждый дом, номер которого делился без остатка на b. При этом, если на доме уже была наклеена афиша, новую Воробьянинов не клеил. Сколько всего афиш расклеил бывший предводитель дворянства?

Формат входных данных

Три строки содержат три натуральных числа: n — количество домов на улице, a и b — выбранные Воробьяниновым числа. Все числа не превосходят 10^9.

Формат выходных данных

Выведите одно неотрицательное целое число — количество расклеенных афиш.

Система оценки

Решения, верно работающие при $n \leqslant 10^5$, будут оцениваться в 60 баллов.

Решения, верно работающие при $a = 2$, будут оцениваться в 20 баллов.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
10 2 3	7
5 10 20	0

Замечание

В первом примере на улице 10 домов. Ипполит Матвеевич первым проходом расклеил пять афиш на дома, номера которых делятся на 2, то есть на дома с номерами 2, 4, 6, 8, 10. Вторым проходом он расклеил две афиши на дома, номера которых делятся на 3, то есть на дома с номерами 3 и 9. Дом номер 6 он пропустил — на нем афиша уже висит. Всего наклеено 7 афиш.

Во втором примере Воробьянинов не наклеит ни одной афиши.

Разбор задач

Задача 1. Разделённый квадрат

Нарисуем данные фигуры. Следуя по периметрам двух прямоугольников, суммарно обведём весь периметр квадрата, а также два раза пройдёмся по общей границы двух прямоугольников, лежающей внутри квадрата. Если сторона квадрата равна x, то периметр квадрата равен $4x$, а общая сторона прямоугольников также равна x. Поскольку мы обвели общую сторону дважды, то $a + b = 6x$, откуда $x = (a + b)/6$.

В ответе нужно записать выражение $(a + b)/6$ или любое эквивалентное ему.

Задача 2. Сложение

Вопрос 1. Выпишем результаты выполнения операций: 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, 42, 44, 48, 56, 62, 64, 68. Ответ: 68.

Далее заметим, что у последовательности последних цифр чисел, входящих в последовательность, есть «период» из четырёх элементов 2, 4, 8, 6. Если получилось какое-то число a, то после выполнения следующих четырёх операций мы придём к числу $a + 20$, заканчивающемуся на ту же цифру. Это поможет ответить на оставшиеся вопросы.

Вопрос 2. Чтобы получить число 2022 нужно применять операции к числу 2 так, чтобы период повторился $(2022 - 2) : 20 = 101$ раз. То есть требуется совершить $101 \cdot 4 + 1 = 405$ операций (101 раз повторяется период и ещё одна операция необходима, чтобы получить число 2 из числа 1).

Вопрос 3. Первое трёхзначное число, которое может быть получено — это 102 (к числу 2 прибавили период 20, повторённый 5 раз). Чтобы получить число 1002 повторим период $(1002-102) : 20 = 45$ раз. То есть число 1002 получится из числа 102 за $45 \cdot 4 = 180$ операций. При этом число 1002 не является трёхзначным, предыдущее число в ряду будет равно 996, и между 102 и 996 (включительно) как раз окажется 180 элементов последовательности.

Вопрос 4. Максимальное семизначное число может оканчиваться цифрами 8, 6, 4, 2. Число 9999998 не подходит, а число 9999996 вполне, потому что $9999996 = 9999980 + 16$, а число 9999980 делится на 20.

Вопрос 5. Будем представлять степень двойки в виде суммы одного из начальных членов последовательности 2, 4, 8, 16 и числа, кратного 20: $64 = 4 + 60$, $128 = 8 + 120$, $256 = 16 + 240$, но $512 = 2 + 510$, а поскольку 510 не делится на 20, то число 512 не встретится в последовательности.

Ответы: 68, 405, 180, 9999996, 512.

Задача 3. Микроволновая печь

Вопрос 1. Чтобы получить 37 секунд, нужно нажать на кнопку и добавить ещё 7 секунд. Для этого сначала два раза повернём ручку, добавив 2 секунды, а после нажатия на кнопку повернём ручку ещё один раз, добавив 5 секунд. Ответ: «`++#+`».

Вопрос 2. Чтобы получить 3 минуты, нажмём кнопку 4 раза. Тогда табло покажет 2 минуты, и после одного поворота ручки можно будет добавить сразу 1 минуту. Ответ: «`####+`».

Вопрос 3. Прибавим 17 секунд к 3 минутам поворотами ручки в следующем порядке: $1+1+5+10$, поэтому нужно правильно расставить повороты ручки после нажатия на кнопки. Также учтём, что 2 минуты нужно получить четырьмя нажатиями на кнопку, а третью минуту добавить одним поворотом ручки. Ответ: «`++#+##+#+`».

Вопрос 4. Для установки 3 минут 19 секунд лучше не увеличивать время при помощи кнопки и поворота ручки вправо, а поворачивать ручку влево: прибавить 3 минуты 30 секунд и вычесть 11 секунд. Последовательность 3 минуты 30 секунд набирается как «`#####+`». Чтобы вычесть 1 секунду необходимо, чтобы на табло было меньше 30 секунд. Поэтому после первого нажатия на кнопку нужно вычесть сначала 5 секунд, а затем 1 секунду: «`#--`». Теперь вычтем ещё 5 секунд, для этого нужно нажать на кнопку, а зачем вычтем, получится последовательность «`#--#-`». Добавим оставшиеся нажатия на кнопку и поворот ручки. Ответ: «`#--#-###+`».

Вопрос 5. Чтобы набрать 4 минуты 57 секунд, требуется вычесть 3 секунды из целого числа минут. Нажав один раз на кнопку и повернув ручку влево, получим 25 секунд, два раза повернув ручку вправо — 27 секунд. Осталось добавить 4 минуты 30 секунд, что делаем нажатием на кнопку, а потом — поворотом ручки вправо на 1 минуту. Ответ: «`#-++#####++`».

Задача 4. Субботник

Это задание удобно выполнять с использованием электронной таблицы, например, Microsoft Excel или Libre Office Calc. В таблице набор исходных данных находится в ячейках A1:A100.

Вопрос 1. Из наибольшего значения роста вычтем наименьшее. Для этого в одну из ячеек таблицы запишем формулу «=МАКС(A1:A100)-МИН(A1:A100)». Значением формулы будет число 358.

Вопрос 2. Разобьём людей на две группы: 50 человек с наименьшим ростом и 50 человек с наибольшим ростом. Воспользуемся функцией сортировки электронной таблицы для блока A1:A100 по возрастанию значений. Ячейка A1 содержит наименьшее их всех значений, а ячейка A100 — наибольшее. В первой бригаде окажутся люди из блока A1:A50, а во второй бригаде — из блока A51:A100. Неудобство первой бригады равно разности значений в ячейках A50 и A1 ($1755 - 1561 = 194$), а неудобство второй бригады — разности A100 и A51 ($1919 - 1755 = 164$). Ответом является наибольшее из этих чисел, то есть 194. Также можно получить ответ одной формулой: «=МАКС(A50-A1;A100-A51)».

Вопрос 3. После упорядочивания разобьём активистов на бригады по 10 человек, то есть в первую бригаду попадут активисты из блока A1:A10, во вторую — A11:A20 и т.д. Запишем в ячейку B1 формулу «=A10-A1», чтобы найти неудобство первой бригады. Скопируем эту формулу в ячейки A11, A21, A31, ..., A91, получим значения неудобств всех бригад. Для того, чтобы не выполнять копирование 9 раз, выделим блок B1:B10 из одной формулы и 9 пустых ячеек, скопируем его, затем выделим блок B11:B100 и вставим в него содержимое буфера обмена. Тогда в блоке B11:B100 9 раз будет повторяться формула, после которой следует 9 пустых ячеек.

Теперь в некоторых ячейках столбца B записаны значения неудобства всех бригад. Чтобы найти среди них максимальное, используем формулу «=МАКС(B1:B100)», получим значение 54.

Вопрос 4. В упорядоченном массиве значений роста необходимо выбрать 10 подряд идущих элементов с минимальной разностью первого и последнего. Формула «=A10-A1» даёт неудобство бригады A1:A10. Если записать эту формулу в ячейку B1, а потом скопировать её в блок B2:B91, то получим неудобства всех бригад, в которых человек с самым низким ростом меняется от A1 до A91. Ответом будет минимальное из этих значений «=МИН(B1:B91)», то есть 14.

Ответы: 358, 194, 54, 14.

Задача 5. Том Сойер

В первой подзадаче ($b = r = 0$) у Тома только жёлтые билетики, за каждый десяток которых он получает одну награду. Найдём частное от деления y на 10, это число и является ответом.

```
y = int(input())
r = int(input())
b = int(input())
ans = y // 10
print(ans)
```

Во второй подзадаче ($b = 0$) у Тома только жёлтые и красные билетики. Сведём эту задачу к предыдущей: обменяем все красные билетики на жёлтые, добавим их к тем, которые уже есть у Тома и потом обменяем их все на награды.

```
ans = (r // 10 + y) // 10
```

Третья подзадача ($y, r, b \leqslant 10^5$) позволяет получить баллы за моделирование обменов билетиков с помощью циклов, например, так:

```
while b >= 10:
    b -= 10
    r += 1
while r >= 10:
    r -= 10
    y += 1
ans = 0
```

```
while y >= 10:
    y -= 10
    ans += 1
```

Полное решение: узнаем, сколько дополнительных красных билетиков можно получить из синих, и добавим их к уже имеющимся. Аналогично узнаем, сколько дополнительных жёлтых билетиков можно получить из красных, и добавим их к уже имеющимся. Определим количество наград за жёлтые билетики.

```
y = int(input())
r = int(input())
b = int(input())
ans = ((b // 10 + r) // 10 + y) // 10
print(ans)
```

Задача 6. Прогрессия

Решение заключается в разборе различных случаев. Посчитаем разности между выписанными числами: $d_1 = b - a$, $d_2 = c - b$.

Если $d_1 = d_2$, то записанные числа уже образуют арифметическую прогрессию. Значит, стёртое число было первым или четвёртым. Если оно стояло четвёртым, то принимало значение $c + d_1$. Если оно стояло первым, то равнялось $a - d_1$. Можно вывести любой из этих вариантов, они оба правильные.

В остальных случаях стёртое число находилось либо между a и b, либо между b и c. Если $d_1 = 2d_2$, то было стёрто второе число из четырёх, это число равно среднему арифметическому a и b. В противном случае стёрли третье число из четырёх, оно равно среднему арифметическому b и c.

```
a = int(input())
b = int(input())
c = int(input())

d1 = b - a
d2 = c - b

if d1 == d2:
    print(c + d1, 4)
elif d1 == 2 * d2:
    print((a + b) // 2, 2)
else:
    print((b + c) // 2, 3)
```

При этом нельзя использовать для анализа случаев условие $d_1 > d_2$ вместо $d_1 = 2d_2$, так как арифметическая прогрессия может быть убывающей, тогда значения d_1 и d_2 будут отрицательными. Но возможно использовать абсолютные значения: $|d_1| > |d_2|$.

Задача 7. Расклейка афиш

Первую подзадачу ($n \leqslant 10^5$) можно решить с использованием перебора, например, так:

```
n = int(input())
a = int(input())
b = int(input())
ans = 0
for i in range(1, n + 1):
    if i % a == 0 or i % b == 0:
        ans += 1
print(ans)
```

Вторую подзадачу ($a = 2$) можно решить с использованием разбора двух случаев.

Если b тоже чётное, то при втором проходе Воробьянинов не расклеит новых афиш.

Если b — нечётное, то каждый второй дом, на который нужно наклеить афишу на втором проходе, уже будет иметь афишу (так как сумма двух нечётных чисел всегда чётна). Чтобы найти число подходящих номеров поделим n на b, а потом полученное число поделим на 2 с округлением вверх.

```
ans = n // 2
if b % 2:
    ans += (n // b + 1) // 2
print(ans)
```

Для решения задачи на полный балл нужно сложить количество афиш, наклеенных Воробьяниновым при первом проходе, и количество афиш, которые он наклеит при втором проходе так, если бы первого прохода не было. Мы дважды посчитали дома, номера которых делятся нацело и на a, и на b.

Посчитаем количество номеров домов, которые делятся и на a, и на b. Первое такое числоа должно делиться нацело и на a и на b и быть наименьшим возможным. Согласно определению, это наименьшее общее кратное a и b. Его можно найти через каноническое разложение обоих чисел на простые множители или через наибольший общий делитель (который в свою очередь находится с помощью алгоритма Евклида):

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{НОД}(a, b)}$$

Итоговое количество вычитаемых чисел составит n // (a * b // НОД(a, b))

```
def gcd(n, m):
    if m == 0:
        return n
    return gcd(m, n % m)

n = int(input())
a = int(input())
b = int(input())
ans = n // a + n // b - n // (a * b // gcd(a, b))
print(ans)
```