

Задача 1. Кодовый замок

Аня попросила свою подругу Таню дать покататься на её велосипеде. Чтобы взять велосипед, Ане придётся открыть кодовый замок. В замке четыре колёсика, на каждое из которых нанесены цифры от 0 до 9. Таня не сказала Ане код, но сообщила следующее:

1. Сумма цифр кода равна 16.
2. В коде нет повторяющихся цифр и цифр, отличающихся на 1.

Немного подумав, Аня сказала, что этой информации недостаточно. Тогда Таня добавила, что число, образованное цифрами кода, должно быть максимально возможным среди всех подходящих. Определите код замка. В ответ запишите четырёхзначное число.

Задача 2. Репка

Дед, Баба, Внучка, Жучка, Кошка и Мышка собираются поужинать пареной Репкой, которую они все вместе вытянули чуть больше часа назад. Большой круглый стол уже накрыт, но персонажи никак не рассядутся, потому что у каждого есть свои пожелания.

- Кошка и Жучка не поссорятся, только если будут сидеть как можно дальше друг от друга.
- Мышка боится сидеть рядом с кошкой.
- Внучка хочет, чтобы её соседями были Баба и Жучка.
- Деду будет приятно видеть Внучку, сидящую напротив него.
- Баба и Дед поругались, пока тянули репку, поэтому не хотят сидеть рядом.
- Баба привыкла сидеть рядом с Кошкой.

Рассадите их так, чтобы все были довольны.

В ответе нужно записать одну строку, состоящую из букв «Д», «Б», «В», «Ж», «К», «М», указанных в том порядке, в котором персонажи должны сидеть за столом. Не забудьте, что стол круглый, и первый персонаж будет сидеть рядом с последним.

Задача 3. Субботник

Десять активистов расчищают берег реки от мусора. Им осталось только убрать старые брёвна, принесённые течением. Одно бревно перетаскивает бригада, в которой может быть два и более человек.

Если люди в бригаде имеют разный рост, переносить бревно неудобно. Назовём *неудобством бригады* разность между ростом самого высокого и самого низкого человека в бригаде. Рост и значение неудобства будем измерять в сантиметрах. Например, если в бригаде три человека ростом 172, 168 и 177 сантиметров, то неудобство этой бригады равно $177 - 168 = 9$.

Рост 10 активистов, переносящих брёвна, в сантиметрах составляет:

170, 166, 176, 166, 176, 168, 179, 163, 168, 161.

Ответьте на следующие вопросы.

1. Пусть все участники субботника объединены в одну бригаду. Чему будет равно неудобство такой бригады?
2. Пусть активистов нужно разделить на 2 бригады по 5 человек в каждой. Необходимо, сделать так, чтобы в каждой из них неудобство бригады оказалось минимальным. Чему будет равно большее из неудобств двух бригад?
3. Пусть активистов нужно разделить на 5 бригад по 2 человека в каждой. И вновь необходимо сделать так, чтобы в каждой из них неудобство бригады оказалось минимальным. Чему будет равно наибольшее из неудобств этих бригад?
4. Чтобы отнести последнее бревно, требуется бригада из 4 человек. Необходимо выбрать 4 человека из 10 так, чтобы составить бригаду с минимально возможным неудобством. Чему будет равно неудобство этой бригады?

Задача 4. Сложение

Сложение чисел «в столбик» изучают на простых примерах. Но даже сложение многозначного числа с однозначным может быть непростой задачей, потому что при этом происходит перенос в старший разряд, и могут измениться все цифры числа, а не только последняя.

Оксана прибавляет к числу его последнюю цифру. Назовём такое действие «операцией». К полученному числу она прибавляет его последнюю цифру, затем прибавляет к результату его последнюю цифру и т.д. Оксана начинает с числа 1 и после первой операции получает 2, после второй — 4, после третьей — 8, после четвёртой — 16, после пятой — 22 (потому что $16 + 6 = 22$).

Ответьте на следующие вопросы. Во всех случаях выполнение операций начинается с числа 1.

1. Какое число получится после выполнения 15 операций?
2. Сколько операций нужно выполнить, чтобы получить число 2022?
3. Сколько трёхзначных чисел будет в этой последовательности, если выполнять операции достаточно долго?
4. Какое наибольшее трёхзначное число можно получить, выполняя эти операции?

Задача 5. Микроволновая печь

У микроволновой печи есть табло, на котором отображается время приготовления пищи, круглая ручка, которую можно крутить вправо или влево, изменяя продолжительность работы, и одна кнопка.

Если поворачивать ручку вправо, то время на табло будет увеличиваться, а если поворачивать влево — уменьшаться. Величина изменения значения при повороте ручки зависит от того, какое время показывает табло в настоящий момент.

Если табло показывает меньше 30 секунд, то при повороте ручки значение изменится на 1 секунду. Если на табло от 30 до 59 секунд, то при повороте ручки значение изменится на 5 секунд. Если на табло не меньше 60 секунд и меньше 2 минут, то при повороте ручки значение изменится на 10 секунд. Наконец, если на табло 2 минуты и больше, то при повороте ручки значение изменится на 1 минуту. При этом время не может стать отрицательным, то есть если на табло горит 0 секунд, то при повороте ручки влево останется 0 секунд.

При нажатии на кнопку к времени, указанному на табло, всегда прибавляется ровно 30 секунд.

Поворот ручки вправо будем обозначать знаком «+», поворот ручки влево — знаком «-», а нажатие на кнопку — знаком «#».

Например, последовательность действий «##+-» будет выполняться так. Сначала на табло горит 0. После нажатия на кнопку получилось 30 секунд. После поворота ручки вправо — 35 секунд. После нажатия на кнопку — 1 минута 5 секунд, после поворота ручки влево — 55 секунд.

Разные блюда нужно готовить в микроволновке разное время. Для каждого из указанных времён определите **кратчайшую последовательность** действий, позволяющую установить необходимую продолжительность работы; начальным временем на табло примите 0. Ответом на каждый вопрос является последовательность, содержащая только символы «+», «-» и «#». Если на какой-то вопрос существует несколько лучших ответов, то вы можете указать любой из них.

1. 37 секунд.
2. 3 минуты.
3. 3 минуты 17 секунд.
4. 3 минуты 19 секунд.
5. 4 минуты 57 секунд.

Разбор задач

Задача 1. Кодовый замок

Чтобы число оказалось как можно большим, необходимо выстроить его цифры в порядке убывания: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. В частности, на первой позиции должна стоять цифра 9, если это возможно.

Следом за 9 не может стоять 8, потому что в коде нет двух цифр, отличающихся на 1. Но если поставить на первую позицию цифру 9, а вторую — 7, то сумма уже будет равна 16, а оставшиеся две цифры по условию не могут обе являться нулями.

Если поставить на вторую позицию цифру 6, то сумма двух оставшихся цифр должна быть равна 1, что выполнимо, только если одна из этих цифр 1, а другая — 0, но тогда не выполняется второе условие.

Если поставить на вторую позицию цифру 5, то последние две цифры в сумме дадут 2, что означает, что одна из этих цифр — 2, а другая — 0. Запишем эти цифры в порядке убывания.

Ответ: 9520.

Задача 2. Репка

Ответ: ДМЖВБК. Этот ответ единственный, с точностью до поворотов и записи в обратном порядке. То есть ответы «МЖВБКД», «КДМЖВБ» и т.д. (это повороты ответа), а также ответ «КБВЖМД» и его повороты тоже будут правильными.

Задача 3. Субботник

Вопрос 1. Из наибольшего значения роста вычтем наименьшее: $179 - 161 = 18$.

Вопрос 2. Разобьём людей на две группы: пять человек с наименьшим ростом и пять человек с наибольшим ростом. Для этого удобно упорядочить значения роста по неубыванию: 161, 163, 166, 166, 168, 168, 170, 176, 176, 179. В первой бригаде неудобство будет равно $168 - 161 = 7$, во второй бригаде — $179 - 168 = 11$. Ответ — 11.

Вопрос 3. Разобьём участников на пары после упорядочивания по росту. Получатся такие пары: (161, 163), (166, 166), (168, 168), (170, 176), (176, 179). Наибольшее значение неудобства в одной паре составит $176 - 170 = 6$.

Вопрос 4. Из упорядоченного списка выберем четыре подряд идущих элемента с минимальным неудобством. Минимальное неудобство будет равно 2 в четвёрке (166, 166, 168, 168).

Ответы: 18, 11, 6, 2.

Задача 4. Сложение

Вопрос 1. Выпишем результаты выполнения операций: 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, 42, 44, 48, 56, 62, 64, 68. Ответ: 68.

Далее заметим, что у последовательности последних цифр чисел, входящих в последовательность, есть «период» из четырёх элементов 2, 4, 8, 6. Если получилось какое-то число a , то после выполнения следующих четырёх операций мы придём к числу $a + 20$, заканчивающемуся на ту же цифру. Это поможет ответить на оставшиеся вопросы.

Вопрос 2. Чтобы получить число 2022 нужно применять операции к числу 2 так, чтобы период повторился $(2022 - 2) : 20 = 101$ раз. То есть требуется совершить $101 \cdot 4 + 1 = 405$ операций (101 раз повторяется период и ещё одна операция необходима, чтобы получить число 2 из числа 1).

Вопросы 3–4. Первое трёхзначное число, которое может быть получено — это 102 (к числу 2 прибавили период 20, повторённый 5 раз). Чтобы получить число 1002 повторим период $(1002 - 102) : 20 = 45$ раз. То есть число 1002 получится из числа 102 за $45 \cdot 4 = 180$ операций. При этом число 1002 не является трёхзначным, предыдущее число в ряду будет равно 996, и между 102 и 996 (включительно) как раз окажется 180 элементов последовательности. А само число 996 и является максимальным трёхзначным числом в последовательности.

Ответы: 68, 405, 180, 996.

Задача 5. Микроволновая печь

Вопрос 1. Чтобы получить 37 секунд, нужно нажать на кнопку и добавить ещё 7 секунд. Для этого сначала два раза повернём ручку, добавив 2 секунды, а после нажатия на кнопку повернём ручку ещё один раз, добавив 5 секунд. Ответ: «+++».

Вопрос 2. Чтобы получить 3 минуты, нажмём кнопку 4 раза. Тогда табло покажет 2 минуты, и после одного поворота ручки можно будет добавить сразу 1 минуту. Ответ: «####+».

Вопрос 3. Прибавим 17 секунд к 3 минутам поворотами ручки в следующем порядке: $1+1+5+10$, поэтому нужно правильно расставить повороты ручки после нажатия на кнопки. Также учтём, что 2 минуты нужно получить четырьмя нажатиями на кнопку, а третью минуту добавить одним поворотом ручки. Ответ: «+++####+».

Вопрос 4. Для установки 3 минут 19 секунд лучше не увеличивать время при помощи кнопки и поворота ручки вправо, а поворачивать ручку влево: прибавить 3 минуты 30 секунд и вычесть 11 секунд. Последовательность 3 минуты 30 секунд набирается как «#####+». Чтобы вычесть 1 секунду необходимо, чтобы на табло было меньше 30 секунд. Поэтому после первого нажатия на кнопку нужно вычесть сначала 5 секунд, а затем 1 секунду: «#--». Теперь вычтем ещё 5 секунд, для этого нужно нажать на кнопку, а зачем вычтем, получится последовательность «#--#-». Добавим оставшиеся нажатия на кнопку и поворот ручки. Ответ: «#--#-####+».

Вопрос 5. Чтобы набрать 4 минуты 57 секунд, требуется вычесть 3 секунды из целого числа минут. Нажав один раз на кнопку и повернув ручку влево, получим 25 секунд, два раза повернув ручку вправо — 27 секунд. Осталось добавить 4 минуты 30 секунд, что делаем нажатием на кнопку, а потом — поворотом ручки вправо на 1 минуту. Ответ: «#-++#####+».