

11 класс

Первый день

- 11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.
- 11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.
- 11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?
- 11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC , в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MN . Прямые MN , BI и AB ограничивают треугольник T_b , а прямые MN , CI и AC ограничивают треугольник T_c . Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$.