

**Задача 5. Банковские кризисы****(12 баллов)**

В свете Нобелевской премии по экономике 2022 г. и банковского кризиса в США в марте 2023 г. Всероссийская олимпиада по экономике не могла обойтись без задачи о банковских кризисах. Для ее решения достаточно понимания стимулов экономических агентов и того, что банк привлекает депозиты и выдает кредиты. Знания специализированных концепций, таких как банковский мультипликатор, не требуется.

а) (3 балла) Ключевым элементом кризиса являются *набеги вкладчиков на банки*. При этом ожидания банкротства определенного банка могут являться *самосбывающимися*. Объясните, как работают самосбывающиеся ожидания при набеге на банк.

б) (3 балла) Как развитие современных коммуникационных технологий влияет на то, насколько быстро происходит набег на банк? Ответьте, основываясь на ваших рассуждениях в пункте а).

в) (3 балла) В экономической науке существует дискуссия о том, какая структура связей между банками более устойчива и минимизирует вероятность системного кризиса. В частности, рассматриваются две в некотором смысле противоположные структуры — *распределенная* и *кольцевая*. Они представлены на рисунке:

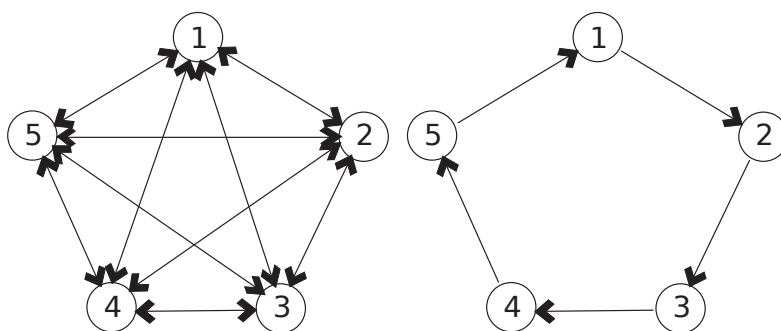


Рис. 5.1: Распределенная (слева) и кольцевая структуры связей между банками.

В *распределенной структуре* каждый банк связан с каждым — иными словами, каждый банк проводит операции (дает кредиты и берет депозиты) с каждым из остальных банков, причем в одинаковых объемах. При *кольцевой структуре* каждый банк дает кредиты одному банку, а принимает депозиты от другого, и так по кругу. То есть банк сохраняет у себя определенную долю в резервы, а остальную часть кладет на депозит в партнерский банк. Кроме изображенных на рисунке связей между банками, есть также и связь каждого банка с реальным сектором — банк берет депозиты у домохозяйств и выдает кредиты различным предприятиям. Из общих соображений кажется, что распределенная структура более устойчива, чем кольцевая. Основываясь на особенностях поведения банков, объясните, почему это может быть не так.

г) (3 балла) Из-за того, что фирмы, занимавшие деньги у разорившихся банков, будут вынуждены брать кредиты в других банках, общество будет нести издержки. Некоторые из этих издержек очевидны: это расходы на бумагу для новых договоров, и т. п. Опишите, какие еще издержки будет нести общество из-за того, что фирмы будут вынуждены брать кредиты в других банках.

## Решение

а) Поскольку часть средств вкладчиков банк выдал в качестве кредитов, банк не может вернуть деньги всем вкладчикам одновременно. Если часть вкладчиков начинают ожидать, что банк А по какой-то причине разорится, то они начинают изымать из него деньги (закрывать депозиты), чтобы успеть изъять средства до того, как они закончатся (стать именно теми вкладчиками, кто получит деньги). Понимая это, те вкладчики, которые изначально не ожидали, что банк разорится, узнав о поведении первой группы вкладчиков, тоже начинают изымать деньги — чтобы успеть. В итоге для каждого вкладчика, независимо от того, ожидал он изначально, что банк разорится, или нет, становится рациональным действием изъять свои деньги. Как следствие, банк действительно разоряется, потому что денег изымают больше, чем банк способен в данный момент выдать. То есть банк сталкивается с невозможностью удовлетворить текущие требования вкладчиков, значит объявляется неплатежеспособным (банкротом). Сам факт ожиданий банкротства первой группой вкладчиков привел к банкротству банка. Ожидания претворились в жизнь просто из-за того, что сформировались, поэтому они являются самосбывающимися.

б) Из ответа а) следует, что набег на банк тем масштабнее, чем быстрее одни вкладчики узнают о действиях других. Развитие соцсетей увеличивает скорость распространения такой информации. Рост скорости распространения информации, при сопутствующей вере агентов в нее, стимулирует все больше людей в единицу времени снимать свои средства со счета в банке.

Приложения для онлайн-банкинга тоже можно рассматривать как проявление развития коммуникационных технологий (коммуникация между агентом и банком). Интернет-банкинг упрощает изъятие средств, что может побудить «ленивых» вкладчиков (которые хотели бы снять деньги, но им не хочется идти в банк или этот поход связан с слишком большими издержками) снять свои средства. Что при прочих равных увеличивает количество заемщиков, требующих средства в единицу времени. Также агенты не будут тратить время на поход в банк, а значит те, кто хочет снять деньги с депозитов сделают это сразу, как услышат убедительную для них негативную новость. Получается, что вкладчики более синхронно изымают свои средства, так как через приложение это делается быстро, что увеличивает количество заемщиков, требующих средства в единицу времени.

Поэтому развитие современных коммуникационных технологий увеличивает размер и скорость набега на банки.

в) **Аргумент 1. Моральный риск.** В распределенной системе каждый банк чувствует себя более застрахованным, чем в кольце, так как в случае проблем может перекредитоваться в большем числе других банков. Поэтому он изначально выбирает более рискованные инвестиции в реальный сектор. Так делает каждый банк, что может увеличивать общий риск системы по сравнению с кольцом. А это значит, что в полном графе системный кризис произойдет с большей вероятностью, чем в кольцевой. В данном случае это является проявлением проблемы морального риска.

**Аргумент 2. Изъятие из предосторожности останавливает развитие кризиса в кольце, но не в распределенной системе.** Во время банковской паники банки изы-

мают друг из друга свои депозиты. Предположим, банк 1 обанкротился. Тогда банки, которые связаны с теми банками, которые инвестировали в банкрота, могут начать тянуть депозиты из таких банков, опасаясь, что из-за банкротства банка 1, связанные с ним начнут испытывать проблемы с ликвидностью. Поскольку в полном графе каждый банк связан со всеми, то при банкротстве одного все остальные начнут тянуть депозиты друг из друга, что приведет к мощному сокращению денежной массы, и нехваткой средств у банков для обеспечения текущих расчетов и требований. При системе кольца изъятие средств, наоборот, может помочь остановить распространение кризиса и уменьшить потери денежной массы. Более того, распространение кризиса останавливается на двух банках. Рассмотрим участок кольца, когда банк 3 банкротится:

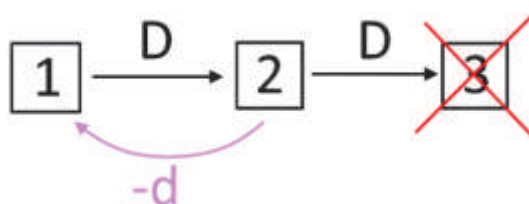


Рис. 5.2: Часть кольцевой системы

В таком случае банк 2 может начать испытывать проблемы с ликвидностью, так как он потерял средства, которые держал в банке 3. Банк 1 понимает это и начинает изымать свои средства из банка 2, что обозначено как  $-d$ . Таким образом он, с одной стороны, сам стимулирует банкротство банка 2 (случай самосбывающихся ожиданий), но с другой, создает себе дополнительный буфер ликвидности для того, чтобы устоять при банкротстве банка 2. В итоге, распространение кризиса может (зависит от того, на сколько большой буфер будет у банка 1) закончиться на вызванном банкротстве банка 2 вследствие банка 3 и всё. В таком случае банкротство одного банка затрагивает сокращение депозитов только в рамках трёх банков (1, 2, 3), а все остальные банки останутся нетронутыми. Для полного графа это неверно, в такой системе все банки затрагиваются паникой, а не только три, как в кольце. Например, при банкротстве банка 3, первый тоже был бы с ним связан и из него начали бы выводить средства паникующие банки, что увеличивает вероятность банкротства банка 1).

г) Существенные издержки связаны с потерей информации о фирмах, которой обладали обанкротившиеся банки. Эти издержки включают в себя:

- **Издержки из-за неоптимального распределения средств.** Из-за потери информации банкам будет сложнее принять правильное решение о том, какие именно проекты финансировать и в какой степени. В результате общая отдача от проектов для общества может оказаться существенно ниже максимальной, даже если не изменятся общий объем выданных средств и ставка процента.
- **Общее снижение производства из-за роста стоимости кредитования.** Из-за потери информации о фирмах другие банки согласны кредитовать их только под более высокий процент. Это происходит из-за роста премии за риск, ведь новые банки ещё не работали с этими фирмами, а значит не знают специфику

их бизнеса и их надежность как партнеров. Рост стоимости кредита оказывает давление на реальный сектор через канал издержек. Фирмы сокращают производство, падает выпуск в экономике — все общество недополучает доход.

**Примечание 1:** Потерю информации в результате банкротства банков изучал в своих работах Нобелевский лауреат 2022 г. Бен Бернанке, на примере Великой Депрессии.

**Примечание 2:** Если заемщиками являются физические лица, то проблема потери информации не так сильна, так как существуют бюро кредитных историй. Для фирм институт кредитных историй развит существенно хуже.

### *Схема проверки*

Полный балл за пункт ставится только за полностью верное решение участника. Балл за пункт не ставится в случае:

- Любой (логической/теоретической/эмпирической) ошибки.
- Любого аргумента, основывающегося на нерациональном поведении агента.
- Вероятностного характера аргумента («может/возможно/наверное» и т.п.) без указания условий, при которых аргумент верен.

#### а) Типичные ошибки:

- Набег на банк ≠ бежать и вкладывать деньги.
- Отсутствие указания того, что агенты верят в плохую новость. При отсутствии веры в проблемы банка агент не сформирует дефолтных ожиданий на его счет, а значит не идет забирать средства из банка. Утверждение «негативная новость формирует ожидания дефолта банка» является неверным.
- Неверно предположение о том, что от самосбывающегося дефолта страдают только плохие банки.
- Нет связи между плохими новостями и действиями агентов.
- Не описан финальный этап — банк становится банкротом (не показано, что ожидания самосбылись).
- Сам по себе факт набега не означает, что банк обанкротится. Фразы «Может обанкротиться/возможно обанкротится/наверное обанкротится» не засчитывались за корректный аргумент. Банк обанкротится только при условии, что пришло забирать деньги больше вкладчиков, чем рассчитывал банк.
- Нет объяснения того, откуда берется уязвимость к панике (например, часть депозитов выдается в кредиты). Снятие депозитов — естественный процесс для любого банка. Необходимо указывать, что из-за паники и ожиданий вкладчики собираются снять больше, чем банк планировал (у него не хватит резервов).

#### б) Типичные ошибки:

- Не описан механизм того, как скорость передачи информации влияет на скорость набега вкладчиков.

#### в) Типичные ошибки:

- Банк без денег объявляется банкротом.
- «Отразится на остальных банках» — слишком общее утверждение.
- Клиенты банка-банкрота не идут требовать выплаты в другие банки.

- Искусственное банкротство: конструируется ситуация, в которой банк сам себе делает хуже, хотя мог бы этого не делать (нарушение предпосылки о рациональности).
- «В полном графе в случае банкротства страдают все, тогда как в кольце страдает только один»: в полном графе страдают все **но по чуть-чуть**, тогда как в кольце страдает только "сосед но в большей степени, так как эти банки сильно взаимосвязаны (сильнее). Этот аргумент, наоборот, соответствует позиции за распределенную систему.

г) Засчитывается любой аргумент, демонстрирующий конкретные издержки, которые несет общество в результате банкротства, и при этом не содержит (логической/теоретической/эмпирической) ошибки в рассуждении. Пример не должен быть частью перераспределения доходов.

Типичные ошибки:

- Пример является частью перераспределения доходов.
- Использование общих терминов без конкретизации: транзакционные издержки/издержки/нестабильность/неопределенность/выгодность и т.п.
- Указание на издержки, которые фирмы и так несут (если бы) даже без банкротства банка. Например, время на заключение договора в новом банке, ведь договор нужно было бы заключать и со старым.
- Негативное последствие не следует непосредственно из банковского кризиса.



**Задача 6. КПВ в учебе****(12 баллов)**

Рома — ученик старшей школы, который стремится прилежно учиться. Тем не менее, его силы ограничены. У Ромы есть 180 единиц жизненной энергии, которые он может инвестировать в изучение двух предметов — математики и информатики, по каждому из которых можно получить оценку от 0 до 100 баллов. Каждая единица энергии, потраченная на математику, дает 0,5 балла по математике. С информатикой сложнее: каждая единица энергии, потраченная на информатику, дает 1 балл до достижения оценки  $x$  баллов; затем каждая дополнительная единица энергии прибавляет к оценке по информатике лишь 0,5 балла. Обозначим за  $e_1$  и  $e_2$  количества энергии, потраченной на математику и информатику соответственно, за  $g_1$  и  $g_2$  — оценки по математике и информатике соответственно.

Величина  $x$  не является константой, а зависит от  $e_1$  по следующему правилу:  $x = 8\sqrt{e_1}$ . Иными словами, чем больше энергии тратится на математику, тем позже наступает снижение производительности в изучении информатики.

**а) (4 балла)** Постройте КПВ Ромы в координатах  $(g_1, g_2)$ . Выведите уравнение КПВ  $g_2(g_1)$ . Имейте в виду, что если Рома выучил некий предмет на  $g$  баллов, он может написать контрольную и хуже, если того захочет. КПВ может содержать горизонтальный участок.

**б) (4 балла)** Допустим, Рома посвящает учебе всего себя и максимизирует среднее арифметическое двух оценок. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

**в) (4 балла)** Теперь допустим, что кроме оценок Рома в какой-то степени думает и об отдыхе. А именно, он максимизирует величину  $(g_1 + g_2)/2 + e_3/3$ , где  $e_3$  — количество жизненной энергии, оставшееся после затрат энергии на учебу. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

**Решение**

**а)** Формализуем условие. Ограничение на жизненную энергию имеет вид  $e_1 + e_2 \leq 180$ . Зависимость оценки за математику от потраченной на подготовку к ней энергии выглядит как  $g_1 = \frac{1}{2}e_1$ . В свою очередь, зависимость оценки за информатику от  $e_1$  и  $e_2$  имеет более сложный вид:

$$g_2 = \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1} \\ \frac{1}{2}(e_2 - 8\sqrt{e_1}) + 8\sqrt{e_1}, & e_2 \geq 8\sqrt{e_1} \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что  $e_1 = 2g_1$  и получим, что

$$g_2 = \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{2g_1} \\ \frac{1}{2}e_2 + 4\sqrt{2g_1}, & e_2 \geq 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Отсюда можно выразить обратную зависимость  $e_2$  от  $g_2$  на двух участках:

$$e_2 = \begin{cases} g_2, & g_2 \leq 8\sqrt{2g_1} \\ 2g_2 - 8\sqrt{2g_1}, & 2g_2 - 8\sqrt{2g_1} \geq 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Значит, исходное ограничение на затраты энергии по подготовке к предметам может быть переписано в терминах  $g_1$  и  $g_2$  как

$$180 \geq e_1 + e_2 = \begin{cases} 2g_1 + g_2, & g_2 \leq 8\sqrt{2g_1} \\ 2g_1 - 8\sqrt{2g_1} + 2g_2, & g_2 \geq 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Видно, что в целях поиска КПВ мы заинтересованы в строгом равенстве — в противном случае при фиксированном  $g_1$  можно немного увеличить  $g_2$ , а значит, мы не на КПВ (если только мы не преодолели порог в 100 баллов для какого-то из предметов, что, как станет видно чуть дальше, не случится).

Предположим, что  $g_2 \leq 8\sqrt{2g_1}$ . Тогда, если мы находимся на КПВ, выполнено, что  $2g_1 + g_2 = 180$ , откуда  $g_2 = 180 - 2g_1$ . Решая квадратное относительно  $\sqrt{g_1}$  неравенство  $180 - 2g_1 \leq 8\sqrt{2g_1}$  можно получить, что  $g_1 \geq 50$ .

Теперь предположим, что  $g_2 \geq 8\sqrt{2g_1}$ . В таком случае,  $2g_1 - 8\sqrt{2g_1} + 2g_2 = 180$ , откуда  $g_2 = 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$ . Квадратное относительно  $\sqrt{g_1}$  неравенство  $90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1} \geq 8\sqrt{2g_1}$  совпадает с неравенством, рассмотренным выше, с точностью до знака, а потому его решением является множество  $g_1 \leq 50$ .

Суммируя анализ двух участков можно заключить, что

$$g_2 = \begin{cases} 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}, & g_1 \leq 50 \\ 180 - 2g_1, & g_1 \geq 50 \end{cases}$$

Наконец, заметим, что  $90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$  — парабола ветвями вниз относительно  $\sqrt{g_1}$  с максимумом в вершине, а значит сформулированная кривая возрастает до точки  $\sqrt{g_1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow g_1 = 8$ . Но тогда вместо выбора точки на кривой при  $g_1 < 8$  Рома может просто перейти в точку  $g_1 = 8$ , увеличив тем самым  $g_2$ , и написать контрольные хуже при желании. Значит, КПВ Ромы имеет вид

$$g_2 = \begin{cases} 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}, & 8 \leq g_1 \leq 50 \\ 180 - 2g_1, & g_1 \geq 50 \end{cases}$$

Также корректным считается решение, где у КПВ Ромы добавляется горизонтальный участок от точки  $(0; 98)$  до точки  $(8; 98)$ , что отображено на рис. 6.1.

б) Полезность Ромы равна

$$U = \frac{g_1 + g_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_1}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1}; \\ e_2/2 + 4\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} = \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Поскольку Рома будет тратить всю энергию на учебу,  $e_2 = 180 - e_1$ . С учетом этого

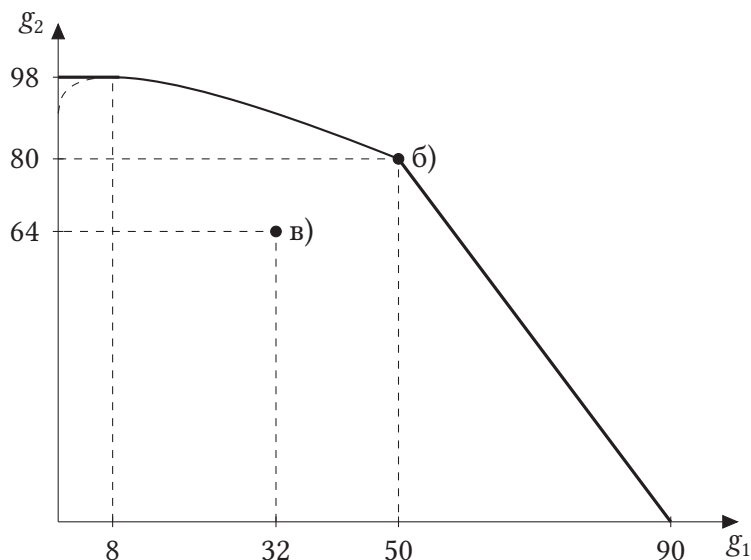


Рис. 6.1: КПВ Ромы и точки, выбираемые им в пунктах б) и в).

полезность переписывается как

$$U(e_1) = \begin{cases} e_1/4 + (180 - e_1)/2, & 180 - e_1 \leq 8\sqrt{e_1}; \\ 45 + 2\sqrt{e_1}, & 180 - e_1 > 8\sqrt{e_1} \end{cases}$$

Как мы знаем, неравенство  $180 - e_1 \leq 8\sqrt{e_1}$  эквивалентно неравенству  $e_1 \geq 100$ , так что

$$U(e_1) = \begin{cases} 45 + 2\sqrt{e_1}, & e_1 < 100; \\ 90 - e_1/4, & e_1 \geq 100. \end{cases}$$

Рома распределит энергию так, чтобы значение этой функции было максимально. Поскольку функция  $45 + 2\sqrt{e_1}$  возрастает, а функция  $90 - e_1/4$  убывает, значение  $U(e_1)$  максимально при  $e_1 = 100$ . В результате Рома получит оценки  $g_1 = e_1/2 = 50$ ,  $g_2 = e_2 = 80$ . Эта точка отмечена на рис. 6.1.

Ответ:  $g_1 = 50$ ,  $g_2 = 80$

в) Теперь полезность Ромы равна

$$U = \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{e_3}{3} = \frac{e_3}{3} + \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Теперь мы не можем сказать, что  $e_1 = 180 - e_2$ , так как есть еще и  $e_3$ . Поскольку  $e_3 = 180 - e_1 - e_2$ , полезность можно переписать как

$$\begin{aligned} U(e_1, e_2) &= \frac{180 - e_1 - e_2}{3} + \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} = \\ &= 60 + \begin{cases} e_2/6 - e_1/12, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1}; \\ -e_2/12 - e_1/12 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} \end{aligned}$$



Рома максимизирует эту функцию по двум переменным  $e_1, e_2$ . Из-за специального вида этой функции максимизация по двум переменным здесь несложная. Действительно, заметим, что, каково бы ни было значение  $e_1$ , полезность возрастает по  $e_2$  при  $e_2 < 8\sqrt{e_1}$  и убывает по  $e_2$  при  $e_2 > 8\sqrt{e_1}$ . Значит, в оптимуме всегда  $e_2 = 8\sqrt{e_1}$ , то есть Рома будет учить информатику ровно до снижения производительности. Подставляя  $e_2 = 8\sqrt{e_1}$  в полезность, получаем функцию от одной переменной

$$U(e_1) = 60 + 8\sqrt{e_1}/6 - e_1/12.$$

Это парабола с ветвями вниз относительно  $\sqrt{e_1}$ , вершина находится в точке  $(8/6) \cdot 6 = 8$ . Значит, в оптимуме  $e_1 = 8^2 = 64$ ,  $e_2 = 8\sqrt{e_1} = 64$ ,  $g_1 = 32$ ,  $g_2 = 64$ .

Эта точка отмечена на 6.1. Она находится под КПВ, что может быть необычным, но не является удивительным. Действительно, если Рома ценит отдых, вполне логично, что он не будет напрягаться на полную мощность, чтобы получать максимально возможную оценку  $g_2$  при фиксированном  $g_1$ .

Ответ:  $g_1 = 32$ ,  $g_2 = 64$

### Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — 4 балла.

1. Линейный участок КПВ:  $g_2 = 180 - 2g_1$  (или иное однозначное описание данного участка) — 1 балл.
2. Нелинейный участок КПВ:  $g_2 = 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$  — 1 балл.
3. Точка излома:  $(g_1, g_2) = (50, 80)$  — 1 балл.
4. Анализ нелинейного участка и указание на горизонтальный (или отсутствующий, в зависимости от интерпретации) участок КПВ при  $g_1 \leq 8$  — 1 балл.
5. Отсутствие графика КПВ — -1 балл.

б) Максимальная оценка за пункт — 4 балла.

1. Корректно записанная функции полезности на линейном участке КПВ — 1 балл.
2. Получение оптимального значения  $g_1 = 50$  на линейном участке КПВ — 1 балл.
3. Корректно записанная функция полезности на нелинейном участке КПВ — 1 балл.
4. Получение оптимального значения  $g_1 = 50$  на нелинейном участке КПВ — 1 балл.

в) Максимальная оценка за пункт — 4 балла.

1. Корректно записанная КПВ в координатах  $(g_1, g_2)$  при фиксированном значении  $e_3$  — 1 балл.
2. Корректное доказательство того, что оптимум достигается в точке излома КПВ, то есть при  $g_2 = 8\sqrt{2g_1}$  (или ссылка на пункт б)) — 1 балл.
3. Корректно записанная функция полезности от одной (любой!) переменной — 1 балл.
4. Получение оптимальных значений  $g_1 = 32$ ,  $g_2 = 64$  — 1 балл.

**Задача 7. Продажа информации****(12 баллов)**

На рынке ценных бумаг выставлены на продажу пакеты акций трех компаний-стартапов А, В и С, каждый по цене 30 млн руб. Компании конкурируют друг с другом, и ожидается, что через год ровно одна из них добьется успеха и её акции будут стоить 54 млн руб., а две другие разорятся и их акции будут иметь нулевую стоимость. Какая именно компания успешная, заранее неизвестно: с равными вероятностями это может быть любая из трех.

Аналитик предлагает услуги исследования рынка и рекомендаций инвесторам, являясь монополистом в этой области. В результате исследования рынка аналитику удастся выяснить ровно об одной случайно выбранной<sup>1</sup> компании правдивую информацию, станет ли она успешной. Издержки на исследование составляют 2 млн руб. После этого аналитик дает рекомендацию, в какие именно акции инвестировать: если он знает, какая компания станет успешной, то её и рекомендует, а если ему известно лишь, что некоторая компания разорится, то он случайным образом выбирает из двух других. Впрочем, вместо добросовестного исследования рынка аналитик может имитировать его, просто порекомендовав купить акции случайно выбранной из трех компании — на это он издержек не несет. Если аналитик безразличен между тем, проводить исследование или имитировать его, он проводит исследование.

Инвестор рассматривает возможность купить акции одной из компаний. Для этого он готов воспользоваться услугами аналитика и приобрести у него некоторый информационный продукт, если ожидает неотрицательную прибыль по итогам всего предприятия. На основе полученной информации инвестор принимает решение, покупать ли акции. Инвестор самостоятельно не может исследовать рынок или наблюдать за деятельностью аналитика.

Каждый экономический агент максимизирует математическое ожидание своей прибыли с учетом той информации, которой обладает. Если прибыль случайна и может принимать два значения  $\pi_1$  и  $\pi_2$  с вероятностями  $q_1$  и  $q_2$  соответственно, то математическим ожиданием прибыли является величина  $q_1\pi_1 + q_2\pi_2$ . Например, если инвестор самостоятельно, не пользуясь услугами аналитика, купит акции компании А, то его ожидаемая прибыль (математическое ожидание прибыли) составит  $\frac{1}{3}(54 - 30) + \frac{2}{3}(0 - 30) = -12$  млн руб. Оба агента знают всю информацию, данную выше в условии.

**а) (2 балла)** Пусть аналитик назначает цену  $p \geq 0$  за рекомендацию, какие акции покупать. Если инвестор соглашается, он платит  $p$  просто за рекомендацию. Какую максимальную цену  $p$  готов заплатить инвестор за рекомендацию на таких условиях?

**б) (4 балла)** Пусть аналитик дает инвестору рекомендацию на следующих условиях: при любом исходе инвестор платит аналитику фиксированную сумму  $p \geq 0$ , а через год, в случае успеха компании, акции которой куплены, — еще дополнительно премию  $b \geq 0$ . Каким должен быть размер премии  $b$ , чтобы аналитик был заинтересован в добросовестном исследовании рынка? Какие параметры контракта  $p$  и  $b$  выберет аналитик, будучи монополистом? Возможно, оптимальных контрактов бо-

<sup>1</sup>Здесь и далее предполагается, что случайный выбор происходит с равными вероятностями.

лее одного — тогда предложите любой их них.

в) (4 балла) Предположим, что аналитик может предоставить инвестору сертификат, подтверждающий выполнение исследования рынка и содержащий всю информацию, которую при этом удалось выяснить. Дополнительные расходы аналитика на сертификацию составляют 1 млн руб. Решение о сертификации принимается аналитиком перед началом исследования рынка. Инвестор платит аналитику за этот информационный продукт цену  $p \geq 0$ , не зависящую от содержания сертификата. Использование премии за успешный исход инвестиций, как в пункте б), не предусмотрено. Как решение инвестора о покупке акций зависит от содержания сертификата? Какую цену  $p$  назначит аналитик?

г) (2 балла) Может ли комбинация информационных продуктов из б) и в) принести аналитику прибыль бóльшую, чем каждый из них?

### Решение

а) У аналитика нет стимулов к добросовестному исследованию рынка: он получает  $p - 2$ , если проводит его, и  $p$ , если просто даёт рекомендацию наугад. Поэтому рекомендация не содержит новой информации и не может влиять на оптимальное решение инвестора (в данном случае — не покупать акции, так как в случае покупки ожидаемая прибыль отрицательная) и на его прибыль (в данном случае нулевую). Следовательно, максимальная цена, которую готов заплатить инвестор за такую информацию-«пустышку», равна нулю.

б) Если аналитик проводит исследование рынка, то с вероятностью  $\frac{1}{3}$  он выяснит, что некоторая компания  $x$  успешная, и тогда он порекомендует  $x$ , а с вероятностью  $\frac{2}{3}$  выяснится, что  $x$  разорится, и тогда аналитик с равными вероятностями порекомендует одну из двух других компаний, успех которой будет ожидаться им с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . Поэтому при заданном  $b$  ожидаемая прибыль аналитика, если он имитирует исследование, равна  $p + \frac{1}{3}b$ , а если он исследует рынок добросовестно, то вероятность правильной рекомендации составляет  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ , так что ожидаемая прибыль равна  $p + \frac{2}{3}b - 2$ . Аналитик заинтересован в добросовестном исследовании, если  $p + \frac{2}{3}b - 2 \geq p + \frac{1}{3}b$ , т.е. при  $b \geq 6$ .

Ожидаемая прибыль инвестора составляет  $\frac{2}{3}(54 - b) - p - 30 = 6 - \frac{2}{3}b - p$ . Инвестор согласится купить информацию, на основании которой потом приобретёт рекомендуемые акции, если эта прибыль будет неотрицательной, т.е. при  $p \leq 6 - \frac{2}{3}b$ . Тогда аналитик, максимизирующий прибыль, установит параметры контракта  $b \in [6, 9]$  и  $p = 6 - \frac{2}{3}b \in [0, 2]$  и получит прибыль 4.

в) Если инвестор получает сертифицированную информацию об успехе компании  $x$ , то он купит её акции и получит прибыль  $54 - 30 - p = 24 - p$ . Если подтверждена неудача, то инвестор не купит акции и получит прибыль  $-p$  (купив акции другой компании, успешной с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , он бы получил меньшую прибыль  $\frac{1}{2} \cdot 54 - 30 - p = -3 - p < -p$ ). Таким образом, ожидаемая прибыль инвестора рав-

на  $\frac{1}{3}(24 - p) + \frac{2}{3}(-p) = 8 - p$  и он готов купить информационный продукт по цене  $p \leq 8$ . Следовательно, аналитик назначит  $p = 8$  и его прибыль с учётом издержек на исследование и сертификацию составит  $8 - 2 - 1 = 5$ , что больше, чем в п. б).

г) Комбинация сертификации и премии не даёт увеличения прибыли по сравнению с п. в): если в условиях п. в) назначить премию  $b$  за успех, то ожидаемая прибыль инвестора равна  $\frac{1}{3}(24 - p - b) + \frac{2}{3}(-p) = 8 - p - \frac{1}{3}b$ , а прибыль аналитика равна  $\frac{1}{3}(p + b) + \frac{2}{3}p - 3 = p + \frac{1}{3}b - 3$ . Тогда  $p$  и  $b$  будут назначены так, чтобы  $p + \frac{1}{3}b = 8$ , т.е. прибыль останется той же, что в п. в). Заметим, что премия как стимулирующий инструмент здесь не работает, поскольку, имитируя исследование рынка, аналитик получил бы в среднем в качестве премии те же  $\frac{1}{3}b$ . Но взамен стимулирующую функцию выполняет сертификация.

### Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — 2 балла.

1. Вывод о том, что  $p = 0$  — 1 балл.
2. Обоснование вывода — 1 балл.
3. Ответ  $p > 0$  (например,  $p = 6$ ) — 0 баллов за пункт а).

б) Максимальная оценка за пункт — 4 балла.

1. Ожидаемая прибыль аналитика при проведении исследования:  $\pi = p + \frac{2}{3}b - 2$  — 1 балл.
2. Получение ограничения  $b \geq 6$  — 1 балл.
3. Получение конкретного удовлетворяющего условиям примера (например,  $p = 2, b = 6$ ) — 2 балла.
4. Отсутствие примера при наличии неполных условий (например,  $b \geq 6, p = 6 - \frac{2}{3}b$ , т.е. не исключена возможность  $p < 0$ ) — снижение на 1 балл.
5. Прибыль аналитика, имитирующего исследование, равна  $p$ , а не  $p + \frac{1}{3}b$  — снижение на 1 балл.
6. Переключение на неправильный ответ к п. а), например,  $p = 6, b = 0$  — снижение на 2 балла.

в) Максимальная оценка за пункт — 4 балла.

1. «Если инвестор получает сертификат об успехе некоторой компании, то он купит пакет акций этой компании» — 1 балл.
2. «Если инвестор получает сертификат о неуспехе некоторой компании, то он не будет покупать ни один пакет акций» — 1 балл.
3. Прибыль  $-3 - p$  в последнем случае — нет дальнейших баллов за п. в).
4. Ожидаемая прибыль инвестора:  $\pi = 8 - p$  — 1 балл.
5. Оптимальная цена:  $p = 8$  — 1 балл.

г) Максимальная оценка за пункт — 2 балла.

1. Корректное обоснование — 2 балла.
2. Разумное интуитивное объяснение без полного обоснования — снижение на 1 балл.



### Задача 8. Дважды оптимальная субсидия (12 баллов)

Фирма-монополист производит товар «Штуки». Спрос на этот товар описывается уравнением  $Q = 80 - P$ . Средние издержки производства одной «Штуки» не зависят от выпуска и равны 20. Участник заключительного этапа олимпиады легко определит, что фирма выберет объем производства, равный 30, в то время как если бы рынок «Штук» был конкурентен, рыночный объем производства равнялся бы 60.

Как известно, в обычных условиях совершенно-конкурентный объем выпуска является еще и оптимальным с точки зрения общества. Государство захотело добиться того, чтобы фирма увеличила свой выпуск до этого уровня, то есть с 30 до 60. Один из способов сделать это — предоставить фирме субсидию, которая зависит от выпуска. Пусть  $S = f(Q)$ , где  $Q \geq 0$  — объем проданной продукции,  $S \geq 0$  — общая сумма выплачиваемой фирме субсидии. Проблема, однако, в том, что разные схемы субсидирования повлекут за собой разные расходы государства.

Если фирма безразлична между несколькими объемами выпуска, она выбирает наибольший из них.

а) (2 балла) Пусть  $f(Q) = aQ$ . Какое значение параметра  $a$  нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

б) (2 балла) Пусть  $f(Q) = aQ^2$ . Какое значение параметра  $a$  нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

в) (8 баллов) Допустим, государство может выбрать в качестве схемы выплаты субсидии любую функцию  $S = f(Q)$ , определенную для всех  $Q \in [0; 80]$  и принимающую только неотрицательные значения, — например,  $f(Q) = a\sqrt{Q} + bQ^3 + \frac{c}{Q+1}$ , или

$f(Q) = \begin{cases} aQ^4, & Q < 10; \\ bQ^4, & Q \geq 10, \end{cases}$  или любую другую (фантазия у государства безгранична). Как

и прежде, функция должна быть такой, чтобы фирма продала 60 «Штук». Какую функцию нужно ввести государству, чтобы расходы на субсидию были минимальны? (Если таких функций несколько, приведите любую из них.) Чему равны эти минимальные расходы?

#### Решение

а) Составим функцию прибыли фирмы:  $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + aQ$ . Фирма максимизирует эту функцию по  $Q$ , оптимальный выпуск находится в вершине параболы:  $Q^* = (60 + a)/2$ . Нам нужно, чтобы этот выпуск равнялся 60, откуда  $Q^* = (60 + a)/2 = 60$ ,  $a = 60$ , расходы равны  $S = aQ = 60 \cdot 60 = 3600$ .

Ответ:  $a = 60$ ,  $S = 3600$ .

б) Теперь функция прибыли фирмы примет вид  $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + aQ^2$ . Фирма максимизирует эту функцию по  $Q$ , оптимальный выпуск находится в вершине параболы:  $Q^* = 30/(1 - a)$ . Нам нужно, чтобы этот выпуск равнялся 60, откуда  $Q^* = 30/(1 - a) = 60$ ,  $a = 1/2$ , расходы равны  $S = aQ^2 = 60 \cdot 60/2 = 1800$ . Расходы при квадратичной субсидии получились меньше.



Ответ:  $a = 1/2$ ,  $S = 1800$ .

в) Функция прибыли фирмы примет вид  $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + f(Q) = 60Q - Q^2 + f(Q)$ .

Будем решать задачу в два шага:

1. Докажем, что при любой схеме выплаты субсидии  $S = f(Q)$ , при которой фирма выбирает выпуск 60, расходы не меньше 900.
2. Приведем функцию  $f^*(Q)$ , при которой расходы равны 900.

Из утверждений 1 и 2 будет следовать, что  $f^*(Q)$  является искомой оптимальной функцией (возможно, не единственной, но находить все оптимальные  $f^*$  не требуется).

Чтобы доказать оценку  $S \geq 900$ , заметим, что оптимальность выпуска 60 означает, что для любого  $Q \geq 0$  должно выполняться

$$60 \cdot 60 - 60^2 + f(60) \geq 60Q - Q^2 + f(Q).$$

Отсюда для любого  $Q \geq 0$

$$f(60) \geq 60Q - Q^2 + f(Q) \geq 60Q - Q^2 + 0,$$

где мы использовали неотрицательность  $f(Q)$ . Полученное неравенство является наиболее сильным при  $Q$  таком, что правая часть  $60Q - Q^2$  максимальна, то есть при  $Q = 30$ . Значит,  $f(60) \geq 60 \cdot 30 - 30^2 = 900$ .

Можно было доказать оценку  $S \geq 900$  и взяв альтернативный выпуск 30 сразу: в любом случае, для фирмы выпуск 60 должен оказаться не хуже, чем, в том числе, ее монопольный выпуск 30. Отсюда можно сразу получить неравенство  $0 + f(60) \geq 900 + f(30) \geq 900$ .

Теперь приведем пример функции  $f(Q)$ , такой что фирма выбирает выпуск 60 и расходы равны 900. Пусть

$$f^*(Q) = \begin{cases} 0, & Q \neq 60; \\ 900, & Q = 60. \end{cases}$$

Иными словами, субсидия платится только за выпуск 60 и в размере 900. При  $Q \neq 60$ , прибыль как и в отсутствие вмешательства равна  $60Q - Q^2$ , а при  $Q = 60$  она равна 900. В итоге оба выпуска 30 и 60 будут давать прибыль 900, и она будет максимальной. По условию, фирма выберет наибольший из этих двух выпусков, то есть 60, и расходы будут равны 900. Значит,  $f^*(Q)$  подходит.

Ответ:  $f^*(Q)$  дана выше,  $S = 900$ .

Примечание 1: Конечно, подходит и множество других функций  $f(Q)$ , например

<

$$f(Q) = \begin{cases} 0, & Q < 60; \\ 900, & Q \geq 60. \end{cases}$$

Вообще, подойдет любая неотрицательная функция  $f$ , такая что:

1.  $f(60) = 900$ ;

2.  $f(Q) \leq Q^2 - 60Q + 900$  для любого  $Q \leq 60$ ;
3.  $f(Q) < Q^2 - 60Q + 900$  для любого  $Q \in (60; 80]$ .

**Примечание 2:** один из естественных, но неверных подходов к задаче такой: поскольку квадратичная субсидия оказалась лучше линейной, будем повышать степень. Нетрудно доказать, что при  $f(Q) = aQ^n$  из равенства производной прибыли нулю получается, что нужно брать  $a(n) = \frac{1}{60^{n-2}n}$ , тогда расходы будут равны  $\frac{3600}{n}$ . Получается, что увеличивая  $n$ , мы можем получить сколь угодно малые расходы, что противоречит нашему ответу 900 выше. В чем проблема с этим рассуждением? Дело в том, что при  $n \geq 4$  и  $S = a(n)Q^n$  60 не будет точкой максимума прибыли — равенства производной нулю для этого недостаточно.

**Примечание 3:** данная субсидия названа «дважды оптимальной», так как она приводит одновременно 1) к установлению оптимального для общества выпуска; 2) к минимальным расходам на выплату субсидии при достижении этого выпуска.

### Схема проверки

- а) Максимальная оценка за пункт — 2 балла.
  1. Корректно полученное значение  $a = 60$  — 1 балл.
  2. Корректно полученное значение  $S = 3600$  — 1 балл.
- б) Максимальная оценка за пункт — 2 балла.
  1. Корректно полученное значение  $a = 0.5$  — 1 балл.
  2. Корректно полученное значение  $S = 1800$  — 1 балл.
- в) Максимальная оценка за пункт — 8 баллов.
  1. Оценка минимального размера государственной субсидии  $S \geq 900$  — 6 баллов, причем:
    - Недоказанное утверждение о том, что  $S \geq 900$  — 2 балла.
    - Частично корректное доказательство (например, недостаточные рассуждения о том, почему невозможно получить  $S < 900$ ) — 4 балла.
    - Полностью корректное доказательство оценки — 6 баллов.
  2. Пример функции  $f(Q)$ , для которой нижняя оценка  $S = 900$  достигается — 2 балла.