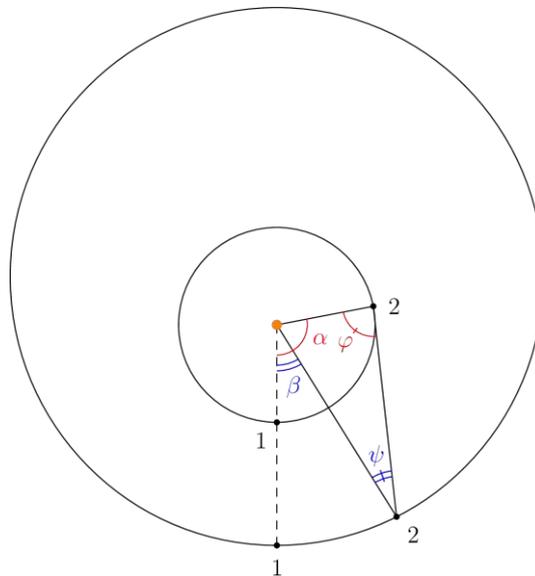


11 класс

11.1 «В далеком созвездии Тау Кита»

Условие. В планетной системе около звезды τ Кита с массой 0.78 массы Солнца обращается несколько планет. Планета c обладает круговой орбитой радиуса 0.195 а.е., планета e движется в той же плоскости и в том же направлении по эллиптической орбите с большой полуосью 0.538 а.е. и эксцентриситетом 0.18. В некий момент времени произошло великое противостояние планеты e для наблюдателя на планете c . Какой будет фаза планеты c при наблюдении с планеты e и фаза планеты e при наблюдении с планеты c спустя 10 дней после великого противостояния?

Решение. В момент великого противостояния обе планеты и центральная звезда находятся на одной прямой, при этом внешняя планета находится в перигеуме. Планеты движутся с различными скоростями, как угловыми так и линейными, поэтому конфигурация меняется с течением времени. Определим положения планет спустя 10 дней.



Планета c движется по круговой орбите, период обращения находим по третьему закону Кеплера в системе единиц «масса Солнца – а.е. – год»:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M},$$
$$T_1 = \sqrt{\frac{a_1^3}{M}} = \sqrt{\frac{0.195^3}{0.78}} = 0.09752 = 35.6 \text{ сут.}$$

Следовательно, за 10 суток внутренняя планета сдвинется на угол α , равный

$$\alpha = 360^\circ \cdot 10/35.6 = 101^\circ.$$

Внешняя планета находится на эллиптической орбите, поэтому для определения смещения понадобится решать уравнение Кеплера. Сначала определим период обращения внешней планеты:

$$T_2 = \sqrt{\frac{a_2^3}{M}} = \sqrt{\frac{0.538^3}{0.78}} = 0.447 \text{ года} = 163 \text{ сут.}$$

Следовательно, за 10 суток с момента прохождения перигелия средняя аномалия возрастет от нуля до величины

$$M = 360^\circ \cdot 10/163 = 22^\circ.$$

Нас интересует величина истинной аномалии, следовательно, сначала требуется решить уравнение Кеплера и определить эксцентрическую аномалию, а затем связать ее с истинной. Уравнение Кеплера имеет вид

$$E - e \sin E = M,$$

где все угловые величины выражены в радианах. После подстановки значений уравнение выглядит как

$$E - 0.18 \sin E = 0.385.$$

Данное уравнение приходится решать численно; поскольку эксцентриситет сравнительно невелик, можно воспользоваться методом последовательных приближений:

$$E_0 = M, E_1 = M + e \sin E_0, \dots, E_n = M + e \sin E_{n-1}, \dots$$

Итерации прекращаем в случае, когда модуль разности двух последовательных значений E будет меньше заданной точности. В нашем случае последовательность приближений будет выглядеть так: $E_0 = 0.385$, $E_1 = 0.4526$, $E_2 = 0.4637$, $E_3 = 0.4655$, $E_4 = 0.4658$. Здесь цепочку приближений можно завершить. Эксцентрическая аномалия составит $E = 26.7^\circ$. Истинная аномалия связана с эксцентрической соотношением

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ v &= 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+0.18}{1-0.18}} \cdot \operatorname{tg} \frac{26.7^\circ}{2} \right) = 31.8^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом, на нашем рисунке $\alpha = 101^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$, разность углов составляет 69° . Определим расстояние от центральной звезды до внешней планеты. Мы знаем истинную аномалию, тогда расстояние от звезды до планеты будет, согласно уравнению эллипса в полярных координатах, равно

$$r_2 = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e \cos v} = \frac{0.538(1-0.18^2)}{1+0.18 \cos 32^\circ} = 0.452 a.e.$$

Это расстояние незначительно больше перигелийного (0.441 а.е.). В треугольнике, образованном планетами и звездой спустя 10 дней после противостояния, мы знаем две стороны и угол между ними. Определим сначала расстояние между планетами по теореме косинусов:

$$r = \sqrt{a_1^2 + r_2^2 - 2a_1r_2 \cos(\alpha - \beta)} = 0.42 a.e.$$

Далее, воспользовавшись теоремой синусов, определим заведомо острый угол ψ с вершиной в положении планеты e :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{r} &= \frac{\sin \psi}{a_1}, \\ \sin \psi &= \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{a_1}{r} = \sin 69^\circ \cdot \frac{0.195}{0.42} = 0.43, \quad \psi = 25.5^\circ. \end{aligned}$$

Тогда фаза планеты e , наблюдаемая с планеты c , составит

$$\Phi_2 = \frac{1 + \cos\psi}{2} = 0.95.$$

Угол с вершиной в планете c , равен $\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta) - \psi = 85.5^\circ$, тогда фаза планеты c , наблюдаемая с планеты e , составит

$$\Phi_1 = \frac{1 + \cos\varphi}{2} = 0.54.$$

Фаза примерно соответствует половине освещенной поверхности диска.

Примечание: орбита планеты c почти круговая, эксцентриситетом 0.03 мы пренебрегли, тем более, что ошибка его определения превышает саму оценку эксцентриситета. Более того, существование самой планеты не подтверждено надежно. Наклонение орбит также неизвестно – в условии описана система, лишь отчасти напоминающая реальную.

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Определение угла поворота планеты c за 10 дней с момента противостояния, точность 3° .

Возможная ошибка участника: неучет отличия массы звезды от массы Солнца. Первый этап не засчитывается, оценка снижается и за последующие этапы (см. далее).

2 этап – 3 балла. Определение истинной аномалии планеты e через 10 дней (средняя, эксцентрическая, истинная аномалия – по 1 баллу), точность 3° .

Возможная ошибка участника: вновь неучет отличия массы звезды от массы Солнца. Оценка снижается на 1 балл, последующие оцениваются в полной мере.

3 этап – 1 балл. Определение расстояние планеты e от звезды через 10 дней, точность 0.005 а.е.

Возможная неточность: участник предполагает, что расстояние осталось равно расстоянию в перигентре. Данный 1 балл за этап не выставляется, но последующие этапы оцениваются в полной мере.

Возможная ошибка: участник игнорирует эллиптичность орбиты второй планеты и действует также, как с первой планетой (фактически, истинная аномалия приравнивается к средней, а расстояние в нужный момент – среднему или перицентрическому). Этапы 2 и 3 не засчитываются полностью.

4 этап – 2 балла (1+1). Определение угла ψ с вершиной в планете e и фазы планеты e .

5 этап – 2 балла (1+1). Определение угла φ с вершиной в планете c и фазы планеты c .

Требуемая точность выполнения 4 и 5 этапов составляет 3° по углу и 0.03 – по фазе, без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах. При наличии этих ошибок необходимо сделать пересчет фаз с их учетом и сравнивать ответы участника с этими значениями.

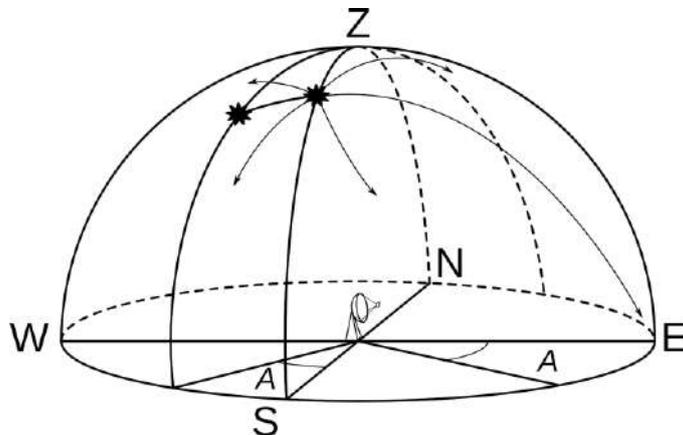
11.2. Метеорное эхо

Условие. Радар, изучающий метеоры, фиксирует радиоэхо только тогда, когда направление от радара к метеору перпендикулярно ионизационному следу метеора. Радар, расположенный на широте $+52^\circ$, направлен в точку востока. В $11^{\text{ч}}02^{\text{м}}$ местного времени 2 июля он начинает получать многочисленные сигналы от метеоров, проходящих через его луч. Радар поворачивают на 40° вдоль горизонта в сторону юга. В новом положении он начинает обнаруживать метеоры того же потока в $12^{\text{ч}}42^{\text{м}}$. Найдите экваториальные координаты (прямое восхождение и склонение) радианта этого метеорного потока. Уравнением времени пренебречь.

Решение. Когда радар направлен в точку востока, линия его обзора есть линия запад-восток. Метеоры могут быть перпендикулярны лучу радара в этом случае, если их радиант расположен в плоскости, перпендикулярной этому лучу, то есть на небесном меридиане. В день летнего солнцестояния, 21 июня, прямое восхождение Солнца равно $6^{\text{ч}}$. За 11 суток Солнце смещается на

$$\Delta\alpha = 360^\circ \frac{11}{365.25} \approx 10.8^\circ = 0.72\text{ч}.$$

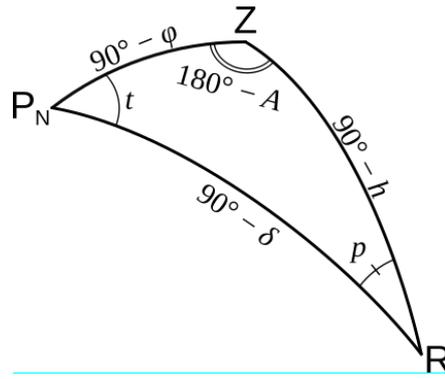
Следовательно, 2 июля в местный полдень в верхней кульминации находятся светила с прямым восхождением $6.72\text{ч} \approx 6^{\text{ч}}43^{\text{м}}$. За 58 минут до полудня в верхней кульминации были звёзды с прямым восхождением $6^{\text{ч}}43^{\text{м}} - 58^{\text{м}} = 5^{\text{ч}}45^{\text{м}}$. Это одно из возможных значений прямого восхождения радианта. Второе соответствует нижней кульминации, т. е. $17^{\text{ч}}45^{\text{м}}$. Здесь мы не делали разницу между солнечным и звездным временем, поскольку за время ~ 1 часа эти шкалы расходятся всего на 10 секунд, что явно находится за пределами точности вычислений.



После того, как радар перенаправили в точку на горизонте, которая имеет азимут на 40° больший, чем точка востока, он будет фиксировать метеоры, чей радиант находится на вертикалах с астрономическими азимутами 40° или 220° .

Если в первый момент времени радиант находился в верхней кульминации ($t = 0$), то через $1^{\text{ч}}40^{\text{м}}$ он будет в западной полусфере неба, и для него возможен только вариант $A = 40^\circ$. Если же радиант располагался в нижней кульминации над точкой севера, то во второй момент для него возможна только восточная полусфера и азимут 220° . Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Мы можем построить параллактический треугольник, в котором нам известны часовой угол $t = 1^{\text{ч}}40^{\text{м}} = 25^\circ$ и азимут $A = 40^\circ$, а также широта места наблюдения. Тогда с помощью сферической теоремы косинусов мы можем найти параллактический угол:



$$\begin{aligned} \cos p &= -\cos t \cos(180^\circ - A) + \sin t \sin(180^\circ - A) \cos(90^\circ - \varphi) = \\ &= \cos t \cos A + \sin t \sin A \sin \varphi \approx 0.908. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $p \approx 24.7^\circ$. Чтобы найти склонение радианта, можно воспользоваться теоремой синусов для сферического треугольника:

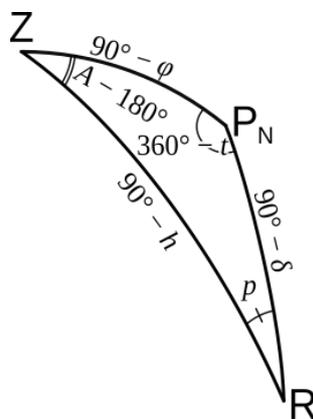
$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin p} \Rightarrow \frac{\cos \delta}{\sin A} = \frac{\cos \varphi}{\sin p} \Rightarrow \cos \delta = \frac{\cos \varphi \sin A}{\sin p} \approx 0.946.$$

Тогда склонение равно $\delta_1 \approx \pm 18.9^\circ$. На широте 52° над горизонтом поднимаются объекты со склонением вплоть до -38° , поэтому оба значения склонения возможны, и надо сделать выбор. Можно воспользоваться формулой пяти элементов:

$$\sin \delta = \frac{\cos t \sin A \sin \varphi - \sin t \cos A}{\sin p} \approx 0.324 \Rightarrow \delta \approx 18.9^\circ.$$

В данном случае склонение определяется однозначно, поскольку второе значение δ не попадает в область $\pm 90^\circ$. В принципе, эту формулу можно было использовать сразу вместо теоремы синусов.

Еще один способ определения склонения заключается в применении сферической теоремы синусов для высоты радианта в верхней кульминации:



$$\frac{\sin(90^\circ - h)}{\sin t} = \frac{\cos(90^\circ - \varphi)}{\sin p} \Rightarrow \cos h = \frac{\sin t \cos \varphi}{\sin p} \approx 0.623 \Rightarrow h \approx \pm 51.5^\circ.$$

Радант не может находиться глубоко под горизонтом (фактически, это случай нижней кульминации радианта), так как в этом случае метеоры зафиксировать бы не удалось. Полученное значение высоты соответствует склонению радианта $+18.9^\circ$.

Рассмотрим теперь случай нижней кульминации радианта с последующим проходом азимута $A_1=220^\circ$. Рассуждая тем же образом с учетом величины часового угла $t_1=205^\circ$, можно прийти к тем же значениям $\cos p$ и $\cos \delta$. Однако, формула пяти элементов даёт другое значение склонения:

$$\sin \delta = \frac{\sin t_1 \cos A_1 - \cos t_1 \sin A_1 \sin \varphi}{\sin p} \approx -0.324 \Rightarrow \delta \approx -18.9^\circ.$$

Очевидно, что точка с таким склонением вблизи нижней кульминации находится очень глубоко под горизонтом, и метеоры такого потока в этот момент бы не наблюдались. К этому выводу можно было прийти и на основе вычисления высоты радианта над горизонтом:

$$\cos h_1 = -\frac{\sin t_1 \cos \varphi}{\sin p} \approx 0.623 \Rightarrow h_1 \approx \pm 51.5^\circ.$$

Положительная высота здесь невозможна, так как светило с южным склонением не может находиться так высоко в северной части неба.

Наконец, приведем простой приближенный способ, позволяющий определить склонение радианта с небольшой погрешностью, вообще не прибегая к формулам сферической тригонометрии. Предположим, что радиант в первый момент наблюдения находился в верхней кульминации, а потом он оказался на азимуте $+40^\circ$, то есть его суточный путь проходил южнее зенита. До достижения часового угла t он пройдет дугу по небу, приближенно равную $t \cos \delta$. Радант вблизи кульминации движется по небесной сфере практически горизонтально, поэтому эту же дугу можем считать примерно равной

$$t \cos \delta = A \cos h = A \cos (90^\circ - \varphi + \delta) = A \sin(\varphi - \delta) = A(\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta).$$

Отсюда мы получаем:

$$\delta = \arctg \frac{A \sin \varphi - t}{A \cos \varphi} = +15^\circ.$$

Заметим, что мы сразу нашли не только величину склонения (с погрешностью около 4°), но сразу же и его знак. Аналогично, для случая нижней кульминации мы получим склонение около -15° и расположение под горизонтом.

Точные координаты радианта: $\alpha = 5ч45м$, $\delta = +18.9^\circ$, они соответствуют известному летнему дневному метеорному потоку β -Тауриды, порожденному кометой Энке и имеющему возможную связь с Тунгусским явлением.

Система оценивания.

1 этап – 1 балл. Вывод о том, что радиант метеорного потока находится в плоскости, перпендикулярной направлению прихода эхо-сигнала. В частности, на небесном меридиане в момент, когда радар направлен на восток, и на вертикалах 40° и 220° – во втором положении.

2 этап – 3 балла. Определение прямого восхождения радианта. Из них 1 балл выставляется за определение прямого восхождения Солнца в день наблюдения. По 1 баллу выставляется за каждый вариант значения прямого восхождения. Надо учесть, что момент летнего солнцестояния мы знаем с точностью до одних суток. Поэтому участник может получить значения прямого восхождения в пределах ± 4 минуты, что не влияет на оценку.

3 этап – 4 балла. Определение склонения радианта для случая верхней кульминации, точность 2° . При правильном вычислении склонения выставляется 4 балла. В некоторых вариантах выкладок тригонометрические функции могут давать дополнительные решения, как показано выше. Если участники игнорируют эти дополнительные решения, то оценка снижается на 1 балл.

Поскольку часовой угол невелик, параллактический треугольник довольно узкий и может быть приближен плоским треугольником. Такие приближенные решения оцениваются в 2 балла при итоговой погрешности не более чем на 5° и в 1 балл при погрешности в пределах 8° . Также 2 баллами за этап оценивается приведенное выше решение, основанное на длине суточной дуги, где погрешность составляет 4° .

3 этап – 2 балла. Доказательство того, что для случая прямого восхождения 17ч45м решений нет. Здесь участник может по ошибке перепутать величины азимутов и часовых углов и прийти к формальному выводу, что радиант метеорного потока вообще не может быть в нижней кульминации, даже под горизонтом (например, высоты за пределами диапазона $\pm 90^\circ$). Такое решение оценивается 1 баллом.

11.3. Инфракрасная камера

Условие. ИК-камера ASTRONIRCAM 2.5-м телескопа Кисловодской горной обсерватории ГАИШ МГУ не позволяет наблюдать в фильтре J звезды ярче 9.0^m из-за того, что при таком блеске поток фотонов за минимально возможное для камеры время накопления полностью заполняет ячейки детектора, и дальнейшая регистрация фотонов становится невозможной. Оцените аналогичную предельную звездную величину для фильтра K . Детектор камеры обладает практически постоянным квантовым выходом во всем рабочем интервале длин волн, охватывающем обе полосы. Считать, что фильтр J полностью пропускает излучение с длинами волн от 1.17 до 1.34 мкм, а фильтр K – от 2.04 до 2.35 мкм, не пропуская излучение вне этих интервалов. Учесть, что звездная величина звезды Вега (температура 10000 К) равна 0^m в обеих спектральных полосах.

Решение. При решении задачи нам необходимо учесть, что одна и та же звездная величина в разных спектральных полосах не означает равенство энергетических потоков или числа фотонов в этих спектральных интервалах. У разных полос может быть разный «нуль-пункт», то есть тот энергетический поток или поток фотонов, который соответствует нулевой звездной величине. Чтобы сравнивать звездные величины в разных полосах, мы используем «звезду-стандарт», у которой звездные величины в этих полосах одинаковые. Для стандартных фотометрических полос это звезда Вега, чья величина, как сказано в условии, равна 0^m в полосах J и K . Но Вега – это горячая звезда, и максимум ее излучения, согласно закону смещения Вина, приходится на УФ-диапазон:

$$\lambda_M = \frac{2900 \text{ мкм}}{T(\text{К})} = 0.29 \text{ мкм.}$$

Таким образом, фильтры J и K попадают для Веги в диапазон длин волн, где можно применять закон Рэлея-Джинса. Он говорит о том, что поток энергии на единицу длины волны $F_\lambda \sim \lambda^{-4}$. Т.к. энергия одного фотона пропорциональна λ^{-1} , то поток фотонов в диапазоне Рэлея-Джинса $n_\lambda \sim \lambda^{-3}$.

Мы можем обратить внимание, что ширины полос $\Delta\lambda_{JK}$ (0.17 и 0.31 мкм соответственно) значительно меньше, чем центральные длины волн этих полос $\lambda_J = 1.255$ мкм и $\lambda_K = 2.195$ мкм. Используя этот факт, мы можем записать выражение для отношения интегральных потоков фотонов в полосах J и K для горячей звезды:

$$\frac{N_J}{N_K} = \left(\frac{\lambda_J}{\lambda_K} \right)^{-3} \frac{\Delta\lambda_J}{\Delta\lambda_K} \approx 2.9.$$

Если ячейке детектора для полного заполнения в фильтре J требуется собрать N фотонов, то при этом в фильтре K от этой же звезды ($m_J = 9$) накопится втрое меньше фотонов. Если эта звезда будет столь же горячей, как и Вега, то ее звездная величина во всех полосах, включая K , также составит 9^m . И для этой звезды в полосе K мы можем собрать до перенасыщения еще в три раза больше фотонов. Таким образом, предел насыщения в полосе K составит

$$m_K = 9.0 - 2.5 \lg 2.9 = 7.8.$$

Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Обоснованное указание, что обе фотометрические полосы попадают для звезды Вега в диапазон Релея-Джинса. Участник может этого не делать, но при этом дальнейшие расчеты он должен выполнять с помощью общей формулы Планка. Если в дальнейшем участник сразу использует формулу Релея-Джинса, не обосновывая ее применимость – данный этап не засчитывается, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 3 балла. Восстановление правильной зависимости потока фотонов от длины волны в области применимости закона Релея-Джинса. Он может использоваться участником как известный, может выводиться. Этап засчитывается только в случае верного характера закона ($n_\lambda \sim \lambda^{-3}$) или корректного расчета по формуле Планка, если не оговорена применимость закона Релея-Джинса (см. выше). При ином характере (иной степени) все 3 балла не выставляются, последующие оцениваются в полной мере с учетом изменения итогового ответа.

3 этап – 2 балла. Вычисление отношения потоков фотонов от Веги в полосах J и K . При вычислениях участники должны воспользоваться полученной ранее зависимостью потока от длины волны (в том виде, в каком они его получили, даже если она ошибочная) и разницу ширин этих полос. Если хоть один из факторов не учитывается – данные 2 балла не выставляются. Требуемая точность итогового вычисления – 5%.

4 этап – 3 балла. Вычисление итоговой звездной величины в полосе K , точность 0.1^m .

Вероятная ошибка участника: путаница в звездных величинах и вывод, что предельная величина в полосе K будет слабее, чем в полосе J , и ответ около 10^m . Оценка за 4 этап не выставляется (0 баллов).

11.4. Горячая пыль

Условие. Измерения в ИК-диапазоне показали, что белый карлик окружает кольцо из темных пылинок с температурой не более 1500 К. Предполагается, что пылинки попадают в кольцо в результате приливного разрушения пролетающих мимо астероидов. Оцените внутренний и внешний радиусы кольца в километрах, если масса белого карлика 0.8 масс Солнца, радиус белого карлика 0.01 радиусов Солнца, его температура 20000 К, а плотность астероидов 1 г/см³.

Решение. Пылинки, находящиеся на разном расстоянии имеют разную температуру: чем ближе к звезде, тем выше температура. Если максимальная температура пылинок 1500К, следовательно, при большей температуре пылинки испаряются. Отсюда можно оценить внутренний радиус кольца R_1 . Из закона Стефана-Больцмана следует, что частица получает от звезды энергию

$$\frac{L_0}{4\pi R_1^2} \pi r^2 = \frac{4\pi R_0^2 \sigma T_0^4}{4\pi R_1^2} \pi r^2 = \frac{\pi R_0^2 \sigma T_0^4 r^2}{R_1^2}$$

Здесь L_0 , R_0 и T_0 – светимость, радиус и температура звезды, r – радиус астероида. Всю эту энергию частица, нагретая до температуры T , должна излучать. Тогда

$$\frac{\pi R_0^2 \sigma T_0^4 r^2}{R_1^2} = 4\pi r^2 \sigma T^4,$$

$$R_1 = \frac{R_0}{2} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \approx 90 R_0 \approx 630000 \text{ км}$$

Радиус внешней границы R_2 оценим из условия приливного распада. Пусть астероид сферически симметричный. Тогда на центр астероида действует сила притяжения звезды, создающая ускорение

$$w_0 = \frac{GM}{R_2^2}.$$

На ближайшем к звезде краю астероида это ускорение составит

$$w_1 = \frac{GM}{(R_2 - r)^2}.$$

Разность ускорений, действующих на ближнюю и центральную части астероида со стороны звезды, или приливное ускорение, есть

$$w_T = w_1 - w_0 = \frac{GM}{R_2^2} \left[\left(1 - \frac{r}{R_2} \right)^{-2} - 1 \right] \approx \frac{GM}{R_2^2} \left(1 + 2 \frac{r}{R_2} + 1 \right) = \frac{2GMr}{R_2^3}$$

Здесь M – масса звезды, r – радиус астероида. От разрыва астероид удерживает собственная гравитация, ускорение которой равно

$$w_g = \frac{Gm}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho r.$$

Условием разрушения астероида является равенство приливного и гравитационного $w_T = w_g$.
Отсюда

$$R_2 = \left(\frac{3M}{2\pi\rho} \right)^{1/3} \approx 910000 \text{ км}$$

Система оценивания.

1 этап – 1 балл. Вывод о том, что внутренняя граница кольца определяется предельной температурой нагрева пылинок.

2 этап – 3 балла. Запись формул, определяющих нагрев (1 балл) и остывание (1 балл) пылинок и вывод формулы для вычисления внутреннего радиуса кольца (1 балл).

Участники могут использовать формулу для температуры тела, нагреваемого звездой, например, в виде

$$T = 4 \sqrt[4]{\frac{L_0(1-A)}{16\pi\sigma R_1^2}},$$

что не является ошибкой и должно оцениваться полным баллом. Также участники могут пытаться оценить альбедо пылинок. Альбедо в несколько процентов (до 5%) также не является ошибкой, большим его принимать нельзя, так как пылинки по условию задачи темные.

3 этап – 1 балл. Получение величины R_1 . Засчитывается при правильно выполненных предыдущих пунктах и правильной размерности и единицах ответа.

4 этап – 1 балл. Вывод о том, что внешняя граница кольца определяется приливным распадом астероидов.

5 этап – 3 балла. Запись формул, определяющих приливное (1 балл) и гравитационное (1 балл) ускорения и вывод формулы для вычисления внутреннего радиуса кольца (1 балл).

Комментарий: следует заметить, что небольшие астероиды, форма которых далека от круговой, удерживаются от распада не собственной гравитацией (по крайней мере, не только ей), а такими же внутренними силами, которые препятствуют, например, разрушению стола. Участник может пытаться оценить силу, необходимую для разрыва астероида. Если оценка разумная, а ответ правдоподобный, то решение засчитывается в полном объеме.

6 этап – 1 балл. Получение величины R_2 . Засчитывается при правильно выполненных предыдущих пунктах и правильной размерности и единицах ответа.

11.5. Неразумное бегство

Условие. Космический аппарат массой m обращается по круговой околосолнечной орбите с радиусом R_0 . В один момент времени аппарат включает двигатель, создающий постоянную силу тяги, все время направленную от Солнца. При какой минимальной величине этой силы аппарат в итоге покинет Солнечную систему? Считать, что масса аппарата в результате работы двигателя не меняется, взаимодействием с другими телами Солнечной системы, кроме Солнца, и излучением пренебречь.

Решение. На первый взгляд, картина может напоминать движение аппарата с фотонным парусом, чья тяга направлена от Солнца и тем самым облегчает аппарату преодоление силы его притяжения F_G . Однако здесь есть важное физическое различие, в корне меняющее ход решения. В случае фотонного паруса сила светового давления, как и сила притяжения Солнца, убывает обратно пропорционально расстоянию от Солнца R . Это позволяет рассматривать движение аппарата в поле центрального тела с уменьшенной эффективной массой. В этом случае достаточно очевидно, что силе светового давления нужно достичь половины силы притяжения, и орбита из круговой превратится в параболическую.

В нашем же случае сила тяги двигателя f не зависит от расстояния до Солнца. Из этого можно сделать качественный вывод: при включении двигателя аппарат начнет удаляться от Солнца, сила его притяжения F будет убывать, а отношение сил f/F – расти. Таким образом, аппарат может улететь из Солнечной системы и при силе тяги f , меньшей $F_0/2$, где F_0 – притяжение Солнца на расстоянии R_0 . Пока это лишь качественный вывод, который в дальнейшем подтвердится численно в ходе решения.

Сила f является центральной и потенциальной. Поэтому мы можем пользоваться законами сохранения момента импульса и энергии. Равнодействующая сила (мы считаем ее положительной, если она направлена от центра) составляет

$$F = f - F_G = f - \frac{GMm}{R^2}. \quad (1)$$

Здесь M – масса Солнца. Потенциальная энергия аппарата на расстоянии R от Солнца есть

$$E_p = -f \cdot R - \frac{GMm}{R} + C. \quad (2)$$

Здесь C – произвольная константа. Потенциальная энергия достигает максимума на расстоянии R_C , на котором сила F обращается в ноль:

$$R_C = \sqrt{\frac{GMm}{f}}. \quad (3)$$

Очевидно, что при достижении этого расстояния аппарат будет далее вытолкнут из Солнечной системы работой своего двигателя. Казалось бы, нам достаточно посчитать полную энергию аппарата в момент включения двигателя, приравнять ее к потенциальной энергии на расстоянии R_C и тем самым получить выражение для силы f . Однако, этот подход не будет верным. В соответствии с законом сохранения момента импульса, аппарат будет иметь на этом расстоянии перпендикулярную компоненту скорости, а значит, еще и кинетическую энергию, которую также необходимо учесть в выражении для баланса полной энергии.

Итак, в соответствии с законом сохранения момента импульса, перпендикулярная компонента скорости на расстоянии R составит

$$v_T(R) = v_0 \frac{R_0}{R} = \frac{\sqrt{GM R_0}}{R}. \quad (4)$$

Полная скорость $v(R)$ будет не меньше $v_T(R)$. Из этого мы получаем выражение для минимальной полной энергии аппарата на расстоянии R :

$$E = E_p + \frac{mv_T^2(R)}{2} = -f \cdot R - \frac{GMm}{R} + \frac{GMmR_0}{2R^2} + C. \quad (5)$$

Запишем выражение для порогового расстояния R_E , для которого полная энергия окажется максимальной. Именно его нужно будет достичь аппарату, чтобы покинуть Солнечную систему. Для этого приравняем производную полной энергии по радиусу dE/dR нулю:

$$-f + \frac{GMm}{R_E^2} - \frac{GMmR_0}{R_E^3} = \frac{GMm}{R_E^3}(R_E - R_0) - f = 0. \quad (6)$$

Теперь нам нужно проверить, в каком случае аппарат сможет достичь расстояния R_E . Для этого приравняем величины полной энергии на расстояниях R_0 (включение двигателя) и R_E :

$$-f \cdot R_0 - \frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{2R_0} = -f \cdot R_E - \frac{GMm}{R_E} + \frac{GMmR_0}{2R_E^2}. \quad (7)$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} f \cdot (R_E - R_0) + GMm \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{GMm}{2R_0R_E^2} (R_E^2 - R_0^2) &= 0; \\ f \cdot (R_E - R_0) - \frac{GMm}{R_0R_E} (R_E - R_0) + \frac{GMm}{2R_0R_E^2} (R_E - R_0)(R_E + R_0) &= 0; \\ f - \frac{GMm}{R_0R_E} + \frac{GMm}{2R_0R_E^2} (R_E + R_0) = f - \frac{GMm}{2R_0R_E^2} (R_E - R_0) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая далее соотношение (6), имеем:

$$f = \frac{GMm}{R_E^3} (R_E - R_0) = \frac{GMm}{2R_0R_E^2} (R_E - R_0). \quad (9)$$

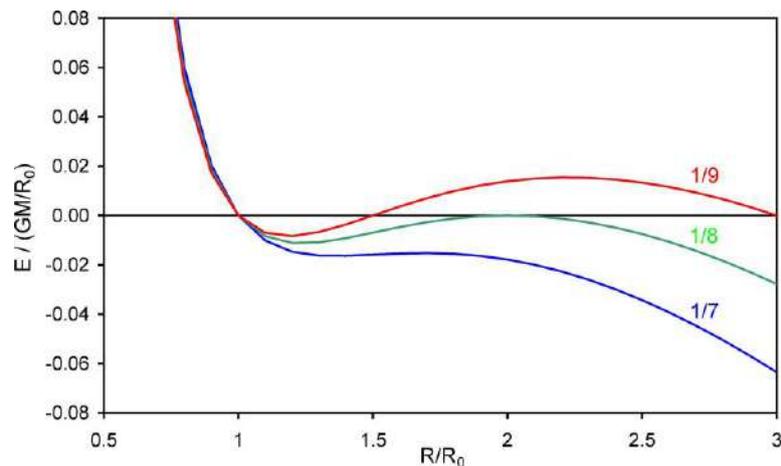
Оставляя вне рассмотрения тривиальное решение $R_E = R_0$, получаем простое выражение для R_E и силы f :

$$R_E = 2R_0; \quad f = \frac{GMm}{8R_0^2}. \quad (10)$$

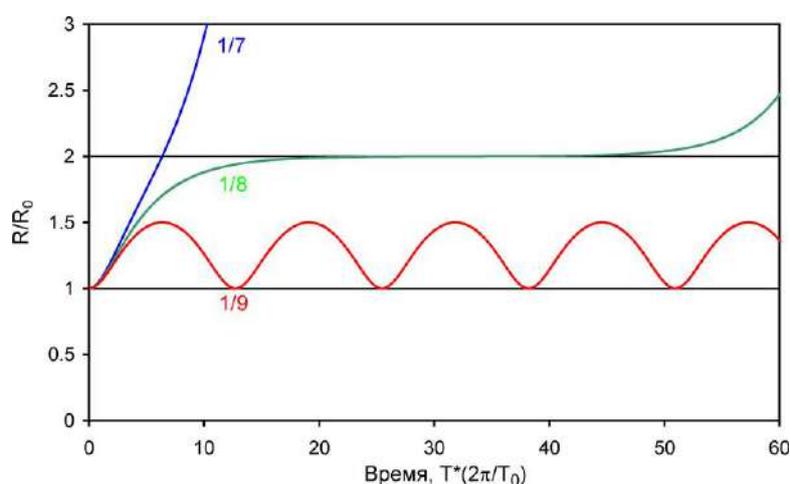
Мы получили ответ на вопрос задачи. Для его наглядности приведем два графика. На первом показана зависимость полной энергии $E(R)$ в соответствии с формулой (5) для силы f , равной $1/9$, $1/8$ и $1/7$ от силы притяжения Солнца на расстоянии R_0 . Отметим, что выражение с

коэффициентом $1/9$ получается в случае неверного предположения о равенстве полной энергии на расстоянии R_0 и потенциальной энергии на расстоянии R_C , о котором мы говорили выше. За ноль энергии принято состояние аппарата в момент включения двигателя на расстоянии R_0 .

Мы видим, что аппарат ни при каких условиях не может приблизиться к Солнцу, а при силе f , меньшей $1/8$ от силы тяжести на расстоянии R_0 , у него есть диапазон расстояний от R_0 до некоторого предела, где он может двигаться. «Лишняя» энергия при этом переходит в радиальное (по отношению к Солнцу) движение аппарата. При граничном значении $1/8$ этот предел составляет $R_E = 2R_0$.



Второй график показывает зависимость расстояния аппарата от Солнца от времени для тех же трех случаев (здесь T_0 – орбитальный период аппарата на расстоянии R_0 с выключенным двигателем). При силе f , равной предельному значению ($1/8$ от силы тяжести на расстоянии R_0) аппарат в итоге оказывается на неустойчивой круговой орбите с радиусом R_E , с которой при малейшем возмущении он в итоге может покинуть Солнечную систему (что в итоге и произошло на графике вследствие конечной точности расчетов). Возможность оказаться на круговой орбите – это еще один критерий, по которому можно было решить задачу, определив выражение для силы f .



Остается лишь добавить очевидный факт: при более правильном использовании двигателя (тяги вдоль движения) аппарат через какое-то время мог бы покинуть Солнечную систему при сколь угодно малой величине тяги.

Система оценивания. Энергетический подход представляется наиболее простым и эффективным методом решения задачи, хотя нельзя исключать применения участниками и других методик. В этом случае необходима детальная проверка решения с выделением этапов, аналогичных по смыслу этапам приведенного выше решения. В случае энергетического подхода система оценивания следующая:

1 этап – 2 балла. Правильное выражение для потенциальной энергии в поле действия притяжения Солнца и тяги двигателя, формула (2) в решении. Константа C в ней может быть принята любой, в том числе и нулевой, и в этом случае не записывается. Участник может записать выражение для потенциальной энергии в непосредственном виде, оно может вытекать из его расчетов. Этап засчитывается только в случае правильной записи обеих слагаемых формулы (2), в том числе их знаков, в противном случае этап не засчитывается (0 баллов). Обращаем внимание, что значение «критического» расстояния R_C в решении, формула (3), сделано для описания возможно неправильного хода решения и от участников не требуется.

2 этап – 2 балла. Применение закона сохранения момента импульса и выражение для перпендикулярной компоненты скорости в зависимости от расстояния до звезды, формула (4). Так же, формула может быть записана в чистом виде или содержаться в выкладках участника. Этап засчитывается только при правильном написании, включая коэффициенты.

3 этап – 1 балл. Запись выражения для минимальной полной энергии в зависимости от расстояния R (формула (5) или эквивалентное ей соотношение). Фактически, это объединение результатов, полученных на первых двух этапах решения.

4 этап – 2 балла. Формулировка условия экстремума полной энергии на расстоянии R_E , за которым аппарат улетит из Солнечной системы (формула (6)).

5 этап – 3 балла. Критерий энергетической достижимости предельного расстояния R_E (формула (7)), вычисление силы f из этого критерия.

В случае ошибок на первом или втором этапе они не засчитываются полностью. Последующие этапы могут быть засчитаны в случае их верного выполнения, если ошибки, сделанные на первых двух этапах не сделают их абсурдными. В частности, если они приводят к изменениям численных коэффициентов, но не нарушают логичность ответа, который должен находиться в интервале от $F_0/10$ до $F_0/2$, не включая граничных значений, то этапы 3 и 4 оцениваются, исходя из качества их выполнения, а этап 5 оценивается из максимума 2 баллов.

При ошибках на первых этапах, которые приводят к абсурдным ответам или их отсутствию, все последующие этапы не засчитываются.

Вероятное неверное решение участника: по аналогии со световым давлением, предполагается, что для вылета из Солнечной системы нужна сила f , равная половине силы тяжести на расстоянии R_0 , то есть $f = GMm/2R_0^2$. Все решение оценивается не выше 1 балла.

Вероятное неверное решение участника: находится расстояние, на котором равнодействующая двух сил равна нулю (R_C , формула (3)). Фактически, вместо экстремума полной энергии берется экстремум только потенциальной энергии. Далее записывается энергетическое условие достижимости этого расстояния. Если это делается с учетом кинетической энергии, то в итоге получается выражение для силы $f = GMm/9R_0^2$. Расстояние R_C при этом равно $3R_0$. По первому рисунку мы можем понять суть сделанной ошибки.

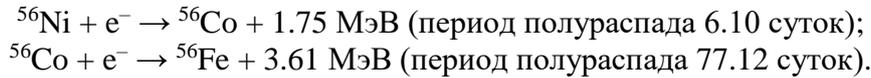
Действительно, при силе $f = GMm/9R_0^2$. полная энергия на расстоянии $3R_0$ сравнивается с полной энергией на старте (R_0). Но эта точка находится за максимумом кривой полной энергии и поэтому не может быть достигнута. В этом случае не засчитываются 3 и 4 этапы решения и снижается 1 балл за последний этап. При отсутствии иных ошибок за решение выставляется 6 баллов.

Участник может сделать еще одну ошибку, не учитывая существование скорости у аппарата на расстоянии R_C и тем самым не выполняя второй этап решения. Минимальная сила в этом случае составляет $F_0 \cdot (3 - 2\sqrt{2})/2 = 0.086 F_0$, что явно меньше истинного значения. Общая оценка не более 4 баллов.

11.6. Волчья Сверхновая

Условие. В мае 1006 года наблюдатели на Земле зафиксировали сильнейшую вспышку звезды в точке неба, находящейся в современной созвездии Волка. По всей вероятности, это была Сверхновая типа Ia, самая яркая на Земле с начала новой эры. Ее видимая звездная величина в максимуме оценивается в -7.5^m . Расстояние до нее составляло 2.2 кпк.

Как известно, кривая блеска сверхновых звезд типа Ia после максимума определяется процессом распада никеля-56, образующегося при вспышке:



Исходя из этих данных, определите общую массу никеля-56, образовавшегося при вспышке сверхновой, и время после регистрации максимума, через которое звезда в небе Земли ослабла до 0^m . Сверхновая наблюдалась в стороне от Млечного Пути, межзвездным поглощением света и болометрической поправкой сверхновой пренебречь.

Решение. Определим абсолютную звездную величину сверхновой звезды в максимуме блеска:

$$m_0 = -7.5 + 5 - 5 \lg(2200) \approx -19.$$

Из сравнения абсолютных величин сверхновой звезды и Солнца получаем светимость сверхновой в момент максимума: $4 \cdot 10^9$ светимостей Солнца или $1.6 \cdot 10^{36}$ Вт или 10^{55} эВ в секунду. В момент максимума мы можем считать, что кобальта-56 образовалось еще мало, и все свечение происходит за счет распада никеля-56 в ходе первой из приведенных в условии реакций. Количество частиц никеля-56 меняется со временем по экспоненциальному закону:

$$N_{\text{Ni}} = N_{\text{Ni}}^0 \cdot \exp(-t \ln 2 / T_{\text{Ni}}),$$

где T_{Ni} – период полураспада никеля. Энерговыведение в реакции распада никеля будет зависеть от времени следующим образом:

$$J_{\text{Ni}} = -E_{\text{Ni}} \frac{dN_{\text{Ni}}}{dt} = \frac{N_{\text{Ni}}^0 E_{\text{Ni}} \ln 2}{T_{\text{Ni}}} \exp(-t \ln 2 / T_{\text{Ni}}).$$

Здесь E_{Ni} – энергия, выделяющаяся при превращении одного ядра никеля в ядро кобальта. Мы знаем величину светимости сверхновой звезды в момент $t=0$, J_{Ni}^0 . Отсюда находим количество ядер никеля-56 в максимуме блеска сверхновой звезды:

$$N_{\text{Ni}}^0 = \frac{J_{\text{Ni}}^0 T_{\text{Ni}}}{E_{\text{Ni}} \ln 2} = 4 \cdot 10^{54}.$$

Полная масса никеля-56, образовавшегося при вспышке сверхновой:

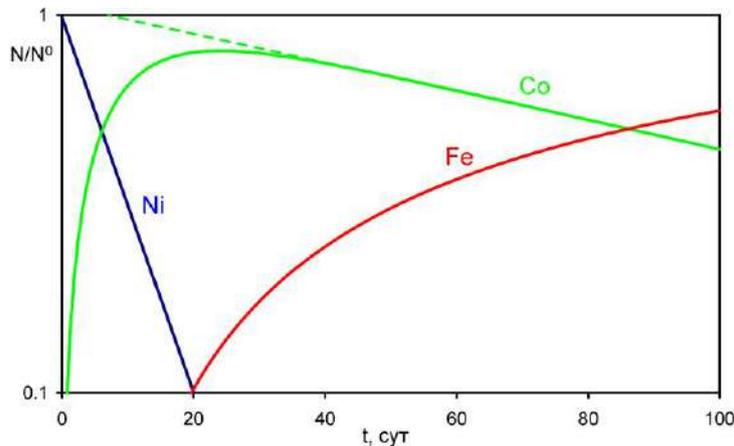
$$M_{\text{Ni}} = \frac{N_{\text{Ni}}^0 \mu}{N_A} = 4 \cdot 10^{29} \text{ кг} = 0.2 M_{\odot}.$$

Здесь μ – молярная масса данного изотопа никеля (она же – и кобальта, и железа, 0.056 кг/моль), N_A – постоянная Авогадро. Мы ответили на первый вопрос задачи. Чтобы ответить

на второй вопрос, определим, во сколько раз должна ослабнуть сверхновая, чтобы ее видимый блеск на Земле стал равным 0^m :

$$k = 10^{-0.4 \cdot 7.5} = 0.001.$$

Количество никеля упадет в 1000 ($\sim 2^{10}$) раз примерно через 10 периодов полураспада никеля, то есть через 61 день. Но в это время появится много кобальта, который распадется еще не успеет, и звезда будет еще достаточно яркой. Поэтому для ответа на второй вопрос задачи нам нужно учесть вторую реакцию приведенного в условии цикла.



В начале процесса кобальт-56 практически отсутствует, затем начинает быстро образовываться. Будем считать начальной эпохой распада кобальта момент, когда в него превратится половина всего никеля, то есть момент $t = T_{Ni}$. Точный анализ зависимости содержания кобальта от времени (рисунок, логарифмический масштаб по ординате) показывает, что это достаточно хорошее предположение. Тогда мы получаем выражение для светимости звезды в «позднюю» эпоху, когда никеля уже нет, и все энерговыделение обеспечивается распадом кобальта:

$$J_{Co} = -E_{Co} \frac{dN_{Co}}{dt} = \frac{N_{Co}^0 E_{Co} \ln 2}{T_{Co}} \exp(-(t - T_{Ni}) \ln 2 / T_{Co}).$$

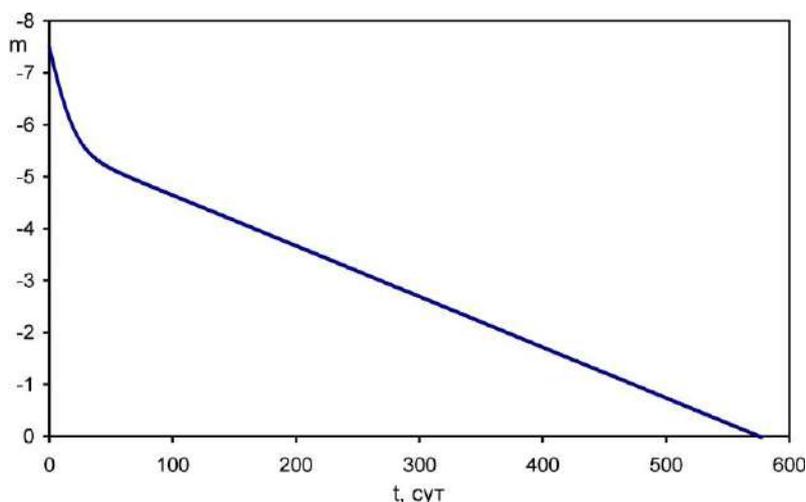
В ходе цикла реакций каждое ядро никеля превращается в ядро кобальта, поэтому стартовое содержание N^0 у никеля и кобальта одинаково. Запишем выражение для отношения светимости сверхновой в момент времени t и в максимуме ($t=0$):

$$\frac{J_{Co}}{J_{Ni}^0} = \frac{E_{Co}}{E_{Ni}} \frac{T_{Ni}}{T_{Co}} \exp(-(t - T_{Ni}) \ln 2 / T_{Co}).$$

Приравняв эту величину k , получаем:

$$t = T_{Ni} + \frac{T_{Co}}{\ln 2} \ln \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{E_{Co}}{E_{Ni}} \cdot \frac{T_{Ni}}{T_{Co}} \right) = 570 \text{ сут} = 1.55 \text{ года}.$$

В справедливости ответа можно убедиться по рисунку.



Система оценивания.

1 этап – 2 балла (1+1). Определение абсолютной звездной величины и светимости сверхновой звезды, точность 10%.

2 этап – 1 балл. Запись зависимости светимости звезды за счет распада никеля J_{Ni} как функции времени. Она может быть записана как известная либо выведена, как сделано в решении выше.

Вероятная ошибка участника: опускание одного или обоих факторов $\ln 2$ в этой формуле. Оценка за этап не выставляется, при этом 3-й этап оценивается в полной мере.

3 этап – 2 балла. Определение массы никеля в момент вспышки сверхновой, точность 20%.

4 этап – 2 балла. Запись зависимости светимости звезды за счет распада кобальта J_{Co} как функции времени. Сдвиг времени, при котором относительное содержание кобальта экстраполируется на единицу, может быть взято в интервале от нуля до $T_{Ni}/\ln 2$ (период уменьшения количества никеля в e раз). Участник олимпиады может указать, что это время мало и на конечный ответ не влияет, и тогда этап может быть засчитан полностью. Если же эффект запаздывания полностью игнорируется или временная задержка выходит за рамки этого интервала, оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника: опускание одного или обоих факторов $\ln 2$. Оценка за этап не выставляется, 5 этап оценивается в полной мере.

5 этап – 3 балла. Определение времени, через которое звезда в небе Земли ослабнет до 0^m , точность – 10 дней. При ошибке до 20 дней оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника на этапах 4-5: предположение, что сверхновая меняет яркость только за счет одной из двух реакций. В этом случае в качестве ответа получается примерно 10-кратный период полураспада соответствующего изотопа (60 дней для никеля и около 770 дней для кобальта). В этом случае 4 этап не засчитывается, за 5 этап ставится 1 балл.