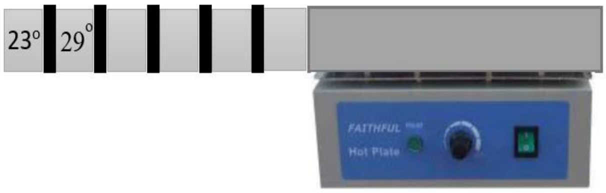
10.1. Магнитики. Как-то раз в руках у экспериментатора Глюка оказались стопка из шести мощных одинаковых магнитов, разделённых одинаковыми картонными прокладками, и высокоточный термометр. Дело оставалось за малым – провести какой-нибудь эксперимент. Не придумав ничего лучше, Глюк включил лабораторную электроплитку и прикрепил стопку магнитов к её боковой поверхности, затем стал измерять температуру крайнего (дальнего от плитки) магнита. Спустя некоторое время его температура перестала изменяться и оказалась равной $t_1 = 23^o$C, а температура соседнего магнита оказалась равной $t_2 = 29^o$C. Также Глюк измерил радиус магнита $r = 2{,}0$ см и его высоту (толщину) $h = 1{,}0$ см.



Определите температуру остальных магнитов и температуру плитки.

Считайте, что:

- магниты обладают очень хорошей теплопроводностью, поэтому температура магнита одинакова во всех его точках;
- температура воздуха одинакова во всех точках вблизи магнитов и равна $t_{\text{ос}} = 20^o$C;
- между магнитом и плиткой картонная прокладка отсутствует;
- теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур цилиндра и воздуха и пропорциональна площади контакта магнита с воздухом;
- поток тепла через картонный диск пропорционален разности температур его поверхностей и пропорционален площади диска.

10.1. Возможное решение. Перенумеруем цилиндры, присвоив номер 1 самому дальнему от поверхности плитки цилиндру. Пусть t_n – превышение температуры цилиндра с номером n над температурой воздуха. Тогда q – поток тепла от первого цилиндра в окружающую среду определяется выражением

$$q = kt_1S.$$

Здесь S – площадь поверхности первого цилиндра, находящейся в контакте с воздухом, k – коэффициент пропорциональности. Площадь поверхности, контактирующей с воздухом, для остальных цилиндров вдвое меньше (радиус цилиндра вдвое больше его высоты) и для этих цилиндров

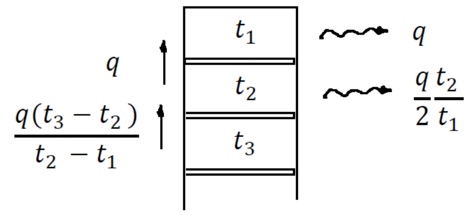
$$q_n = kt_n\frac{S}{2} = q\,\frac{t_n}{2t_1}.$$

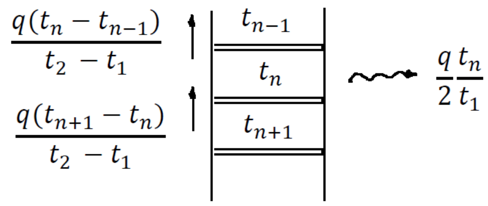
Для потока тепла через картонную прокладку от второго цилиндра к первому q_{21} справедливо выражение

$$q_{2,1} = \alpha(t_2 - t_1)$$

При этом $q_{2,1} = q$, так как температуры цилиндров не меняются. Аналогично для потока тепла через картон от цилиндра с номером $(n+1)$ к цилиндру с номером n

$$q_{n+1,n} = \alpha(t_{n+1} - t_n) = q_{2,1}\frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1} = q\,\frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1}$$





Для цилиндра с номером n условие равенства потоков приходящего и уходящего тепла (уравнение теплового баланса) выглядит так

$$\frac{q(t_{n+1}-t_n)}{t_2-t_1}=\frac{q(t_n-t_{n-1})}{t_2-t_1}+\frac{q}{2}\frac{t_2}{t_1}.$$

После преобразований получаем

$$\frac{t_{n+1}-2t_n+t_{n-1}}{t_2-t_1}=\frac{t_n}{2t_1},$$

$$t_{n+1}=\frac{t_n}{2}\left(3+\frac{t_2}{t_1}\right)-t_{n-1}.$$

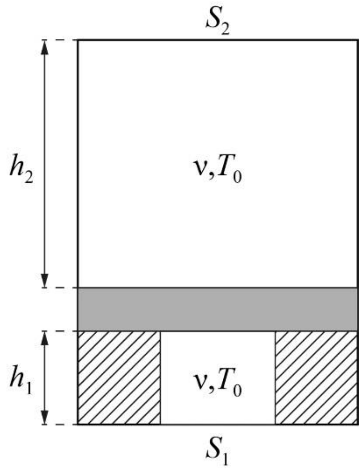
Используя эту рекуррентную формулу, зная значения $t_1=3$℃ и $t_2=9$℃, получаем:

$$t_3=24℃,\ t_4=63℃,\ t_5=165℃,\ t_6=432℃.$$

С учётом того, что t_n – разница температур цилиндра и воздуха окончательный ответ для значений температуры такой: третий цилиндр - 44℃, четвертый - 83℃, пятый - 185℃, шестой и плита - 452℃.

№	**10.1. Критерии оценивания задачи (из 12 баллов)**	**Баллы**
1	В решении учтено, что боковая поверхность первого цилиндра вдвое больше боковой поверхности остальных цилиндров. Если не учтено, то не ставятся баллы за этот пункт и за численные ответы.	1
2	Записано уравнение теплообмена одного из цилиндров с окружающей средой	1
3	Записано уравнение теплопередачи для одной из картонных прокладок	1
4	Записано уравнение теплового баланса для первого цилиндра	1
	Записано уравнение теплового баланса для одного из цилиндров, расположенного не с краю	2
4	Получено верное соотношение, позволяющее рассчитывать температуру цилиндра с номером n по известным температурам цилиндров с меньшими номерами. Если в выражении допущена арифметическая ошибка, то 1 балл.	2
5	Получены верные значения температур для цилиндров с номерами 3-6 (по баллу за ответ). Оцениваются только верные значения вне зависимости от причины ошибки.	4

10.2. Тяжёлый поршень. В вертикальном закрытом сосуде переменного сечения имеются два отделения цилиндрической формы: нижнее с площадью сечения $S_1 = S$ и высотой $h_1 = h$, верхнее с площадью сечения $S_2 = 3S$ и высотой $h_2 = 3h$. Нижнее отделение плотно и герметично закрыто подвижным теплопроводящим поршнем (поршень не приклеен, но газ не проникает в пространство между поршнем и опорами), который может с минимальным трением перемещаться внутри верхнего отделения. В обоих отделениях находится одно и то же количество ν газа при температуре T_0. Газ во всём сосуде медленно нагревают. Когда температура газа достигает величины $2T_0$ поршень отрывается от опор.



1. Чему равна масса поршня?
2. На какой высоте h' от нижнего основания сосуда окажется поршень в равновесии? Температура всего газа поддерживается равной $2T_0$.
3. Газ в сосуде начинают медленно охлаждать. При какой температуре T поршень снова опустится на опоры?

Примечание: температура газа над и под поршнем всегда поддерживается одинаковой.

10.2. Возможное решение.

1. Поршень отрывается, когда сила давления газа под поршнем становится равной сумме сил давления газа над поршнем и силы тяжести поршня: $p_1S_1 = p_2S_2 + mg$. Давление газа можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT \Rightarrow p = \nu RT/V$. Из этих уравнений получим:

$$mg = p_1S_1 - p_2S_2 = \frac{\nu R 2T_0}{h_1} - \frac{\nu R 2T_0}{h_2} = 2\nu RT_0\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) = \frac{4}{3}\frac{\nu RT_0}{h}.$$

Отсюда масса поршня равна $m = \dfrac{4}{3}\dfrac{\nu RT_0}{gh}$.

2. Заметим, что как только поршень оторвётся от упоров, газ под поршнем начнёт давить сразу на всю его площадь, и сила давления скачком увеличится. Так как между поршнем и стенками есть малая сила трения, то через некоторое время поршень остановится в положении равновесия. Запишем условие равновесия:

$$p_1^{'}S_2 - p_2^{'}S_2 = mg \Rightarrow \frac{\nu R\cdot 2T_0\cdot 3S}{S_1h_1 + 3S_1\left(h^{'} - h_1\right)} - \frac{\nu R\cdot 2T_0\cdot 3S}{3S_1\left(4h_1 - h^{'}\right)} = \frac{4}{3}\frac{\nu RT_0}{h}.$$

$$\frac{3}{\left(3h^{'} - 2h_1\right)} - \frac{1}{\left(4h_1 - h^{'}\right)} = \frac{2}{3h}.$$

Отсюда
$$\frac{14h - 6h^{'}}{-3\left(h^{'}\right)^2 + 14hh^{'} - 8h^2} = \frac{2}{3h}.$$

Решая квадратное уравнение, получим: $h' = \frac{23 \pm \sqrt{181}}{6} h.$

Корень со знаком плюс не подходит, так как он больше $4h$. Окончательно:

$$h' = \frac{23 - \sqrt{181}}{6} h \approx 1,6h.$$

3. Пусть теперь газ охладился до температуры T. Запишем условие равновесия с учётом того, что $h = h_1$, и непосредственно перед соприкосновением с опорами газ давит на всю площадь поршня как сверху, так и снизу:

$$\frac{\nu RT \cdot 3S_1}{S_1 h_1} - \frac{\nu RT \cdot 3S_1}{3S_1 \cdot 3h_1} = \frac{4}{3}\frac{\nu RT_0}{h_1} \Rightarrow \frac{8T}{3} = \frac{4T_0}{3} \Rightarrow T = \frac{T_0}{2}.$$

№	**10.2. Критерии оценивания задачи (из 12 баллов)**	**Баллы**
1.	Записано условие отрыва поршня $F_{давл_1} = mg + F_{давл_2}$	1
2.	Учтено, что снизу газ давит не на всю поверхность поршня. $F_{давл_1} = p_1 S_1$	1
3.	Из уравнения состояния идеального газа выражено его давление $p = \frac{\nu RT}{V}$	1
4.	Получен ответ: $m = \frac{4\nu RT_0}{3hg}$	1
5.	Для второго вопроса записано условие равновесия $F'_{давл_1} = mg + F'_{давл_2}$,	0,5
6.	Выражены объёмы газа над и под поршнем	1+1
7.	Получен ответ $h' = \frac{23-\sqrt{181}}{6} h \approx 1{,}59h$ (Если второй ответ не отброшен, то 0,5)	1,5
8.	Для третьего вопроса записано условие равновесия $F''_{давл_1} = mg + F''_{давл_2}$	1
9.	Учтено, что под поршнем газ давит на всю его поверхность.	1
10.	Получен ответ: $T = \frac{T_0}{2}$	2

10.3. Мягкая посадка. Космический корабль должен приземлиться на лишённую атмосферы планету и коснуться её поверхности со скоростью, не превышающей $v_п$, которую могут погасить амортизаторы. На высоте h над поверхностью планеты командир корабля включил тормозной реактивный двигатель, создающий силу тяги, направленную вверх.

Какой по величине в этот момент была скорость υ корабля, направленная вертикально вниз, если оказалось, что в процессе посадки он истратил минимальное количество топлива? (Если таких скоростей несколько, то укажите их все).

Массовый расход μ топлива и скорость u истечения газов относительно корпуса корабля считайте постоянными (командир может выбирать любое значение расхода μ). Изменение массы корабля не учитывайте, ускорение свободного падения равно g.

10.3. Возможное решение. Пусть M – масса космического корабля, μ - массовый расход топлива, u – скорость истечения газов относительно корабля, v – начальная скорость корабля, a – ускорение корабля (направлено вверх).
Поскольку μ и u постоянны, то и реактивная сила тяги $F = \mu u$ тоже постоянна, следовательно, корабль движется равноускорено.

Пусть его конечная скорость равна $v_к$. Введем ось y, направленную вертикально вверх, тогда ускорение корабля $a_y = \frac{v^2 - v_к^2}{2h}$. Время от начала торможения до полной остановки равно $t = \frac{v - v_к}{a_y} = \frac{2h}{v + v_к}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$Ma_y = \mu u - Mg \;\Rightarrow\; \mu = \frac{M(a_y + g)}{u}.$$

Общий расход топлива за время торможения равен

$$m_{топл} = \mu t = \frac{M}{u} \cdot \left(\frac{v^2 - v_к^2}{2h} + g\right) \cdot \frac{2h}{v + v_к} = \frac{M}{u} \cdot \left(v - v_к + \frac{2gh}{v + v_к}\right) =$$
$$= \frac{M}{u} \cdot \left((v + v_к) - 2v_к + \frac{2gh}{v + v_к}\right).$$

Из неравенства Коши известно, что если произведение двух величин равно константе, то их сумма достигает минимума при равенстве величин. В нашем случае произведение $(v + v_к) \cdot \frac{2gh}{v + v_к}$ является константой, значит, минимальная масса потраченного топлива достигается при $v + v_к = \frac{2gh}{v + v_к}$, тогда $v + v_к = \sqrt{2gh}$.

Подставим найденное значение $v = \sqrt{2gh} - v_к$ в формулу для массы потраченного топлива: $m_{топл} = \frac{M}{u} \cdot \left(v - v_к + \frac{2gh}{v + v_к}\right) = \frac{M}{u} \cdot \left(\sqrt{2gh} - 2v_к + \frac{2gh}{\sqrt{2gh}}\right) = \frac{M}{u} \cdot 2\left(\sqrt{2gh} - v_к\right)$. Значит:

1) $m_{топл}$ будет минимальной при максимальной конечной скорости $v_к = v_п$, следовательно, $v = \sqrt{2gh} - v_п$;

2) Полученный нами ответ справедлив при $v_п \le \sqrt{2gh}$; в противном случае будет отрицательный расход топлива и отрицательная начальная скорость, что противоречит физическому смыслу.

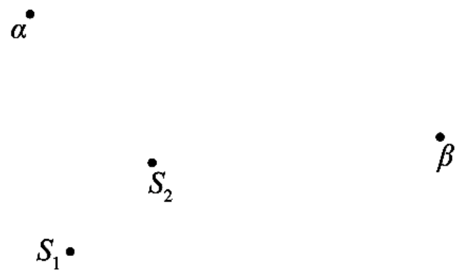
Рассмотрим отдельно случай, когда $v_п \ge \sqrt{2gh}$. При этом корабль может совершать свободное падение с нулевым расходом топлива. Например, при нулевой начальной скорости он приблизится к поверхности со скоростью $v = \sqrt{2gh}$, которая меньше предельной посадочной.

Во втором случае из закона сохранения энергии $v = \sqrt{v_к^2 - 2gh}$ и, учитывая, что

$0 \leq v_к \leq v_п$, получим: $v \leq \sqrt{v_п^2 - 2gh}$.
Окончательный ответ:
Если $v_п < \sqrt{2gh}$, то $v = \sqrt{2gh} - v_п$, при этом двигатели работают, и расход не нулевой.
Если $v_п \geq \sqrt{2gh}$, то $v \leq \sqrt{v_п^2 - 2gh}$, при этом двигатели не работают, и расход топлива равен нулю.

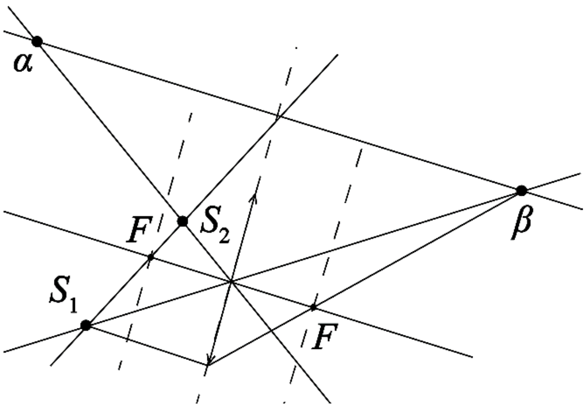
№	**10.3. Критерии оценивания задачи (из 12 баллов)**	**Баллы**
1	Выражение для реактивной силы	1
2	Второй закон Ньютона для корабля	1
3	Уравнение равноускоренного движения	1
4	Получена функция, связывающая количество потраченного топлива и начальную скорость	1
5	Анализ на минимум в общем случае $v + v_к = \sqrt{2gh}$	1
6	Анализ оптимальной конечной скорости $v_к = v_п$ (если используется без обоснования, то за этот пункт 0 баллов, а остальные пункты оцениваются согласно критериям)	1
7	Найден ответ для основного случая: $v = \sqrt{2gh} - v_п$.	2
8	Указана граница применимости основного случая: $v_п < \sqrt{2gh}$	1
9	Отдельно указан случай $v_п > \sqrt{2gh}$	1
10	Найдена скорость для случая $v_п > \sqrt{2gh}$: $v < \sqrt{v_п^2 - 2gh}$. Если вместо неравенства найдена лишь одна подходящая скорость, то ставить 0,5 балла	2

10.4. И снова Снеллиус. В архиве Снелла нашли чертеж. От времени чернила частично выцвели и остались видны только 4 точки, две из которых являются точечными действительными источниками S_1 и S_2, а оставшиеся две (α и β) – их изображениями. Из описания к чертежу следовало, что изображения созданы одной линзой. Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) все возможные положения линзы, её тип и фокусное расстояние.



Примечания: 1. На отдельном листе приведены в увеличенном масштабе два экземпляра чертежа. Все построения выполняйте на этом листе.
2. Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

10.4. Возможное решение. Рассмотрим первый случай. Пусть правое изображение (β) – это изображение источника S_1, а левое (α) – источника S_2. Проведем луч $S_1\alpha$ и $S_2\beta$. (см. рис. 1) Эти лучи идут без преломления, проходя через оптический центр линзы, и значит, точка их пересечения является оптическим центром линзы. Рассмотрим луч S_1S_2: после преломления в линзе он (или его продолжение) должен пройти и через изображения α и β. Значит, плоскость линзы проходит через точку пересечения прямых S_1S_2 и αβ. Построим линзу и перпендикулярно ей главную оптическую ось.
Из чертежа видно, что оба источника оказались с одной стороны от линзы, а изображения - с разных сторон. Такое возможно только в случае собирающей линзы, причём одно изображение будет действительным, а второе – мнимым.



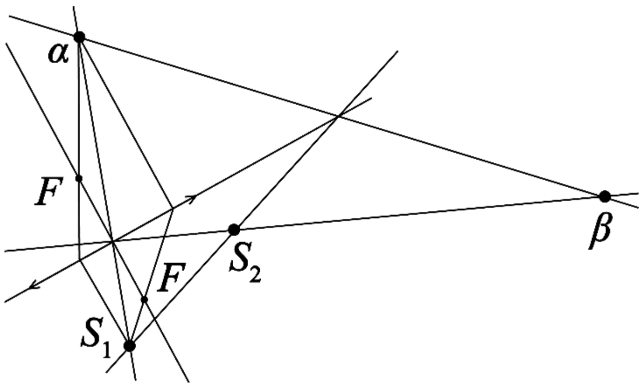


Рис. 1. Рис. 2.

Для определения положения фокусов линзы проведём из S_1 луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в линзе он пойдет в β, пройдя через фокус. Аналогичным образом найдём второй фокус.
Аналогично рассмотрим второй случай. Положение линзы, главной оптической оси и фокусов линзы приведено на рис. 2.

№	**10.4. Критерии оценивания (из 12 баллов)**	Баллы
1	Для одного из случаев построены лучи, соединяющие каждый из источников с его изображением	1
2	Для одного из случаев определён оптический центр линзы	1
3	Для одного из случаев построены: прямой луч, проходящий через оба источника, и прямой луч, проходящий через оба изображения.	1
4	Для одного из случаев определена плоскость линзы	1
5	Для одного из случаев сделан обоснованный вывод, что линза может быть только собирающей.	2
6	Для одного из случаев построены лучи, необходимые для определения фокуса линзы	1
7	Для одного из случаев определены фокусы линзы	1
8	Для второго случая построены лучи, соединяющие каждый из источников с его изображением	0,5
9	Для второго случая определён оптический центр линзы	0,5
10	Для второго случая построены: прямой луч, проходящий через оба источника, и прямой луч, проходящий через оба изображения.	0,5
11	Для второго случая определена плоскость линзы	0,5
12	Для второго случая сделан обоснованный вывод, что линза может быть только собирающей.	1
13	Для второго случая построены лучи, необходимые для определения фокуса линзы	0,5
14	Для второго случая определены фокусы линзы	0,5

10.5. Суммарная мощность. В цепи, изображённой на рисунке 1, суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, равна 7 Вт. Определите суммарную мощность, выделяющуюся на резисторах в цепи, изображённой на рисунке 2.

Характеристики всех элементов цепей **не заданы**, но элементы, обозначенные на схемах одинаково, имеют одинаковые характеристики. Источники можно считать идеальными.

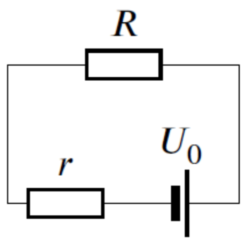


Рис. 1

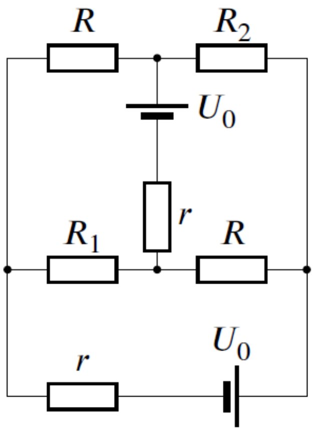
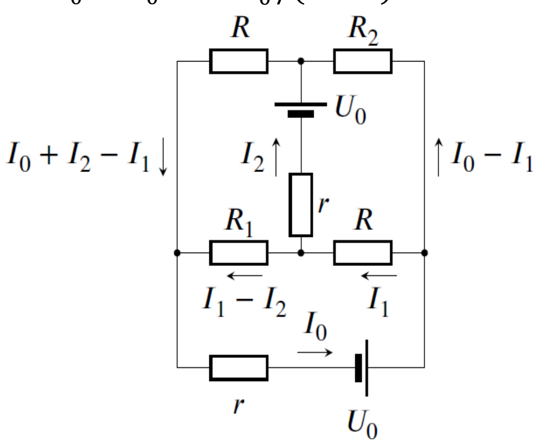


Рис. 2

10.5. Возможное решение. Вариант №1. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи $P_0 = U_0 \cdot I = U_0^2/(r+R)$.

Рассмотрим вторую цепь. Пусть I_0 – сила тока через нижний источник, I_1 – через правый резистор R, I_2 – через верхний источник. Тогда силы тока через резисторы R_1, R_2 и левый резистор R равны, соответственно $I_1 - I_2$, $I_0 - I_1$ и $I_0 + I_2 - I_1$.



Мощность, выделяющаяся во второй цепи, равна суммарной мощности, вырабатываемой источниками $P = U_0 \cdot I_0 + U_0 \cdot I_2$.

С другой стороны, обойдя схему по двум источникам можем записать:

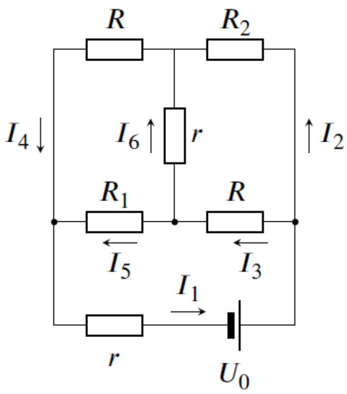
$$2U_0 = I_0 \cdot r + I_1 \cdot R + I_2 \cdot r + (I_0 + I_2 - I_1) \cdot R = (I_0 + I_2) \cdot (R + r).$$

Отсюда, следует, что

$$\mathrm{I_0 + I_2 = \frac{2U_0}{R + r} \Rightarrow P = U_0 \cdot (I_0 + I_2) = \frac{2U_0^2}{R + r} = 2P_0} = 14\ \text{Вт}.$$

10.5. Возможное решение. Вариант №2. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах, равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи

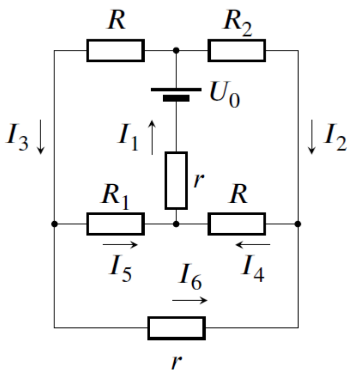
$$P_0 = U_0 \cdot I = U_0^2/(r+R).$$

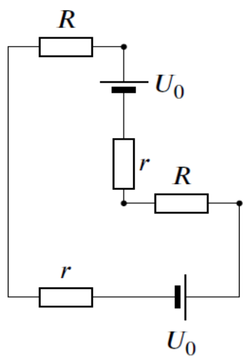


Воспользуемся принципом суперпозиции (метод контурных токов) и рассмотрим вторую цепь следующим образом: уберём верхний источник и расставим токи.

Теперь вернём верхний источник и уберём нижний. Из-за симметрии расположения резисторов получим следующее распределение сил тока: накладывая эти картины распределения друг на друга, получаем, что силы тока через резисторы R_1 и R_2 во второй цепи равны нулю, и эти резисторы можно не учитывать.

Сила тока, текущего в цепи, равна $I' = \frac{2U_0}{2(r+R)} = \frac{U_0}{r+R} = I$. Отсюда находим мощность, выделяющуюся в цепи: $P = 2U_0 \cdot I = 2P_0 = 14$ Вт.





№	**10.5. Критерии оценивания (из 12 баллов)**	**Баллы**
1	Для первой схемы мощность выражена через параметры элементов $$P_0 = U_0^2/(r+R)$$	2
2	Для расчёта второй схемы предложен корректный способ (Кирхгоф, узловые потенциалы, суперпозиция токов, симметрия и т.д.)	2
3	Записан полный набор уравнений/рассуждений, необходимых для решения задачи выбранным методом. Метод Кирхгофа: сумма сил тока для 3 узлов: 1+1+1 балла; два уравнения для обходов контуров: 1,5+1,5 балла. Метод суперпозиции: эквивалентное сопротивление: 1+1 балл; найдены силы тока через элементы: 2+2 балла. Метод суперпозиции + симметрия: расстановка токов для первого источника: 1 балл; симметричная расстановка токов для второго источника: 2 балла; верное сложение сил тока: 2 балла; общая сила тока в результирующей цепи: 1 балл. Метод потенциалов, расстановка потенциалов: 1 балл; сумма сил тока для трех узлов: 1+1+1 балла; закон Ома для четырех элементов: 0,5 х 4 балла. Иной метод: максимальный балл (6 баллов) за пункт умножается на отношение числа записанных независимых уравнений (рассуждений) к минимальному числу уравнений (рассуждений), необходимых для этого метода, независимо от сложности уравнения (рассуждения). ***Пример***: записано 3 уравнения из 4-х необходимых. Тогда оценка за пункт: 6·(3/4) = 4,5 балла.	6
4	Получен верный ответ (Важно!!! Баллы за ответ ставятся только при корректном методе и полном наборе правильных исходных уравнений/рассуждений)	2