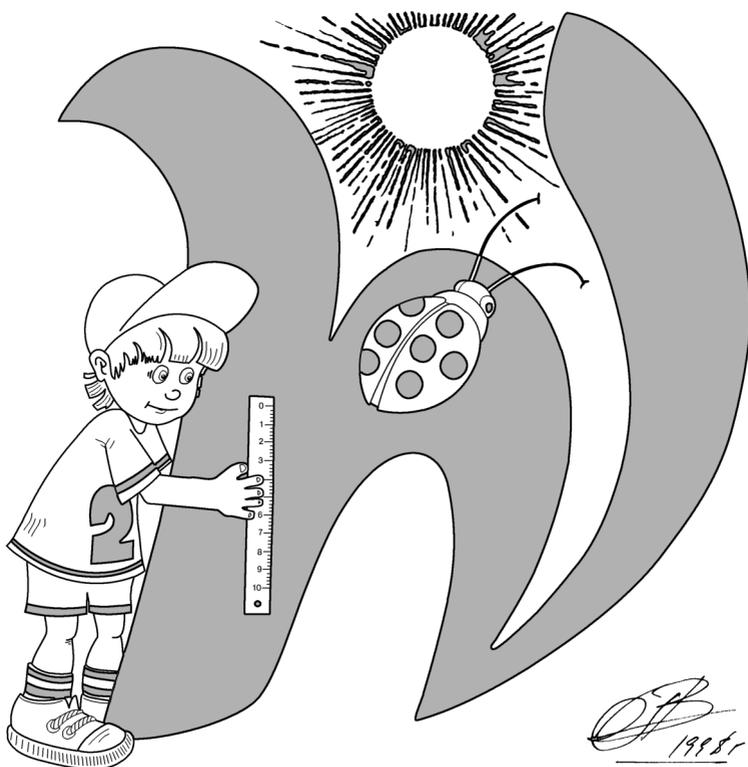


Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

LV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур



Сириус, 2022 г.

9 класс

Задача №1. Автобус

Настя стоит в поле на расстоянии s от прямой дороги, по которой от остановки с постоянным ускорением a в её сторону начинает движение автобус (рис. 1). Расстояние от остановки до девочки равно l . Через какое минимальное время τ Настя сможет оказаться рядом с автобусом, если она умеет бегать со скоростью v ? Временем разгона девочки можно пренебречь.

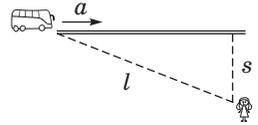


Рис. 1

Задача №2. Черепахи

Три черепахи, движущиеся с постоянными по модулю скоростями и все время поддерживающие курс одна на другую, в момент запуска секундомера находились в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с катетами длиной l (рис. 2). Скорость первой черепахи $v_1 = v$, где v — известная величина, а скорости второй и третьей черепах v_2 и v_3 таковы, что в процессе их движения углы в треугольнике, образованном черепахами, не изменяются. Найдите:

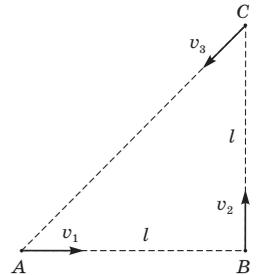


Рис. 2

1. время t , через которое черепахи встретятся;
2. модули скоростей v_2 и v_3 второй и третьей черепах;
3. ускорения черепах в начальный момент времени;
4. на каком расстоянии s от места старта первой черепахи произойдет их встреча.

Задача №3. Ап стену

На гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии s от стены покоится шайба массой m . На нее налетает вторая такая же шайба, движущаяся перпендикулярно стене со скоростью u (рис. 3, вид сверху). Известно, что удары шайб о стену упругие, а при центральном столкновении самих шайб рассеивается доля α ($0 < \alpha < 1$) их суммарной кинетической энергии в системе отсчета их центра масс. Постройте качественный график зависимости расстояния l между первой шайбой и стеной от времени t , отсчитываемого от момента первого столкновения шайб. Отметьте на нем характерные точки.

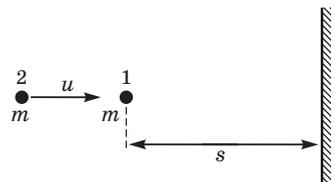


Рис. 3

Задача №4. Ледяная картина

После добавления в сосуд с водой некоторого количества льда в нем устанавливается тепловое равновесие. На рисунке 4 приведена диаграмма, на которой выделены области с указанием конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры $t_{\text{л}}$ и массы $m_{\text{л}}$ добавленного льда.

1. Какая температура установится в сосуде, если в него добавить 0,5 кг льда при температуре -10°C ?
2. Определите начальную температуру t и массу m воды в сосуде.

Тепловыми потерями и теплоемкостью сосуда можно пренебречь. Содержимое из сосуда не выливается. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$.

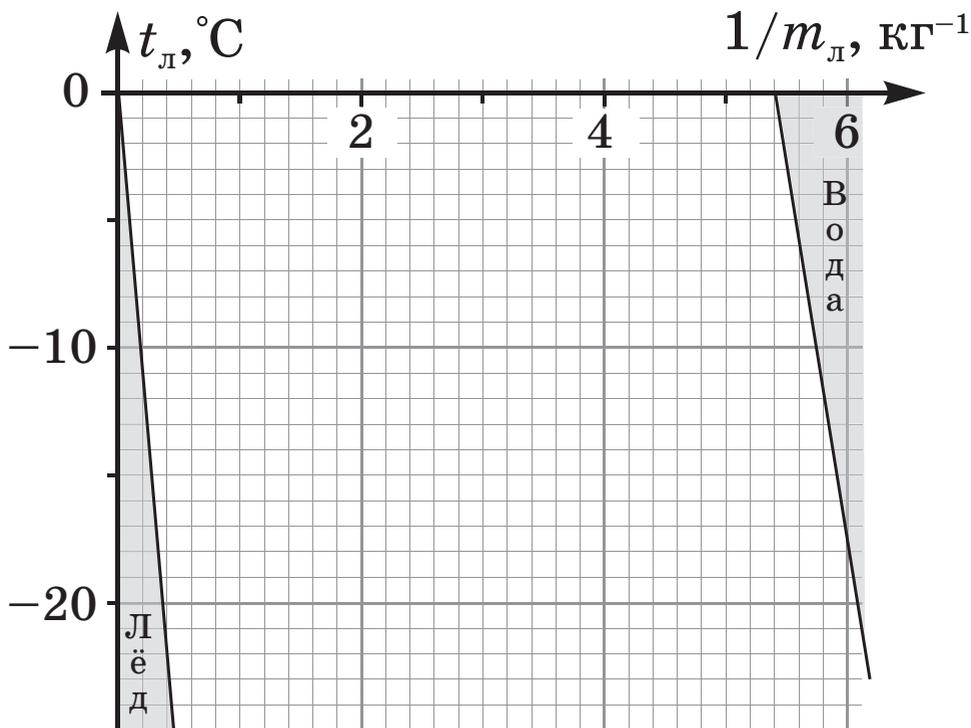


Рис. 4

Задача №5. Электроцикл

Фрагмент электрической цепи состоит из соединенных параллельно диодов, резисторов, ключей и идеального вольтметра (рис. 5). Диоды D_1 и D_2 открываются при разных напряжениях ($U_{01} < U_{02}$). Их вольтамперная характеристика приведена на рисунке 6. На диаграмме (рис. 7) изображен циклический процесс 1 – 2 – 3 – 4 – 1, отражающий связь силы тока I , входящего в фрагмент, и показаний вольтметра U . Масштаб по оси ординат утерян, но известно, что в течение цикла сила тока I изменялась с постоянной по модулю скоростью $k = 1 \text{ мА/с}$, а количество теплоты, выделившееся на резисторах в процессе 2 – 3, равно $Q_{23} = 6,4 \text{ Дж}$.

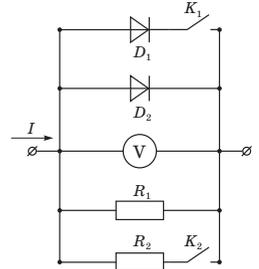


Рис. 5

Опишите возможную последовательность действий с ключами, которая приведет к такому виду циклического процесса. Определите:

1. напряжения открытия диодов U_{01} и U_{02} ;
2. сопротивления резисторов R_1 и R_2 ;
3. время τ , которое длился цикл;
4. количество теплоты Q_{41} , выделившееся на резисторах на участке 4 – 1.

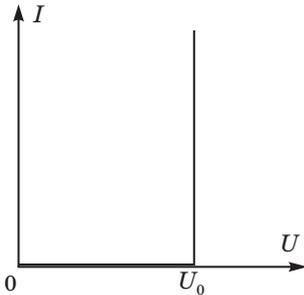


Рис. 6

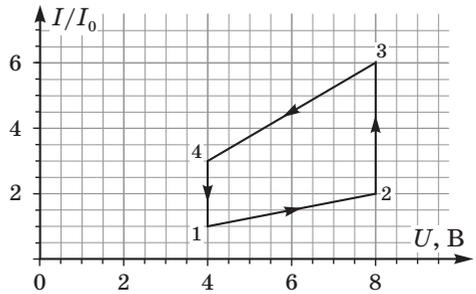


Рис. 7

10 класс

Задача №1. Три тигра

Три тигра одновременно начинают движение по горизонтальной поверхности с постоянными по модулю скоростями. Скорость первого тигра в любой момент времени направлена на второго, скорость второго — на третьего, а скорость третьего — на первого. В начальный момент времени тигры образуют прямоугольный треугольник с катетами, равными L (рис. 1). Считайте размеры тигров много меньшими L . Модуль скорости первого тигра $v_1 = v$, где v — известная величина, а скорости второго и третьего тигров v_2 и v_3 таковы, что в процессе движения углы в треугольнике ABC , образованном тиграми, остаются постоянными.

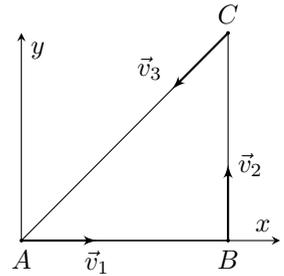


Рис. 1

Введём систему координат так, как показано на рисунке. Начало координат совпадает с положением первого тигра в момент старта (точкой A).

При ответе на первые три вопроса считайте, что тигры не проскальзывают по поверхности и могут развивать любое усилие. Найдите:

1. время t , через которое тигры встретятся;
2. модули скоростей второго и третьего тигров v_2 и v_3 ;
3. координаты (x, y) точки, в которой тигры встретятся.

В действительности движение тигров ограничивается коэффициентами трения их лап о поверхность. Для каждого тигра он одинаков и равен μ . Ускорение свободного падения g .

4. В течение какого времени τ с момента старта тигры могут поддерживать такое движение?

Задача №2. Поле цилиндра

Бесконечно длинный незаряженный металлический цилиндр радиуса R расположен в однородном электрическом поле \vec{E}_0 . Ось цилиндра и вектор напряженности поля горизонтальны и взаимно перпендикулярны (рис. 2). Напряженность поля направлена вправо. На поверхности цилиндра установилось некоторое распределение индуцированных зарядов.

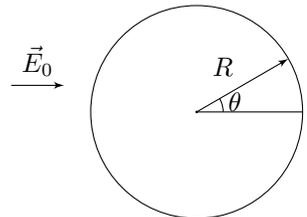


Рис. 2

Далее рассмотрим бесконечно длинный тонкостенный непроводящий цилиндр такого же радиуса R вне поля \vec{E}_0 вдали от первого (проводящего) цилиндра. Поместим на его поверхность заряды так, чтобы зависимость плотности заряда от угла θ к горизонту

(рис. 3) совпадала для обоих цилиндров. Непроводящий цилиндр расположен горизонтально в поле тяжести. Ускорение свободного падения равно \vec{g} (рис. 3).

Поместим внутрь непроводящего цилиндра гладкий точечный положительный заряд q массой m .

1. Определите изменение суммарной потенциальной энергии точечного заряда (энергии в поле тяжести и в электрическом поле) при перемещении его из крайнего левого положения в крайнее правое.
2. Точечный заряд помещают в самое нижнее положение и сообщают ему начальную скорость v_0 , направленную влево, перпендикулярно оси цилиндра. Найдите максимальную скорость заряда $v_{\text{макс}}$ в процессе дальнейшего движения.
3. При каких значениях v_0 точечный заряд совершит полный оборот?

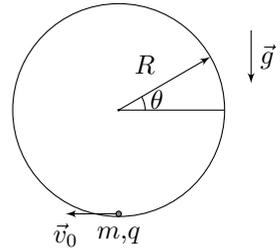


Рис. 3

Задача №3. Электрическая тележка

Электрическая тележка для перемещения грузов состоит из двух цилиндрических колёс и корпуса. Расстояние между осями колёс $2l$. Центр масс тележки O выше пола на h и на x ($x > 0$) правее средней точки между осями. Электродвигатели сообщают колёсам быстрое встречное вращение, как показано на рисунке 4. Коэффициент трения колёс о пол μ ($\mu < l/h$). Массой колёс можно пренебречь. Ускорение свободного падения g . Определите:

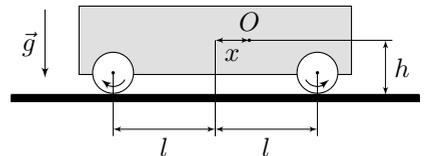


Рис. 4

1. ускорение тележки в начальный момент времени, если ее колеса не отрываются от пола;
2. при каком(их) значении(ях) возможно движение без отрыва колёс.

Задача №4. Неизвестная жидкость под поршнем

В атмосфере с давлением $p_0 = 10^5$ Па расположен вертикальный цилиндрический сосуд сечения $S = 0,01 \text{ м}^2$ и высоты $2H$ ($H = 1 \text{ м}$). Вдоль стенок сосуда может перемещаться без трения герметичный поршень. Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Изначально поршень покоится на небольших опорах, расположенных на высоте H над дном сосуда. Из-под поршня выкачивают весь воздух и помещают

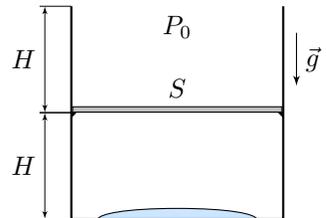


Рис. 5

туда некоторое количество жидкости. После установления термодинамического равновесия температура содержимого сосуда оказалась равна $T_0 = 350$ К. Затем включают нагреватель, и через дно сосуда содержимое под поршнем медленно нагревается. В процессе нагрева измеряют температуру и давление под поршнем. Когда низ поршня достигает отметки $2H$ нагрев прекращают. График полученной зависимости от начала нагрева и до его окончания представлен на рисунке 6.

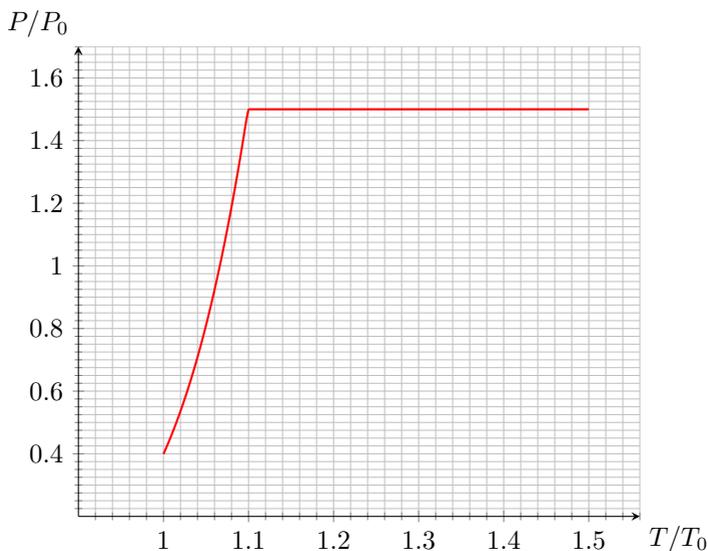


Рис. 6

Удельная теплота парообразования жидкости при температуре $1,1T_0$ равна $L = 2,2$ МДж/кг. Молярная масса жидкости $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Пар жидкости можно считать идеальным многоатомным газом. Объем жидкости много меньше SH . Определите:

1. массу M поршня;
2. массу m_0 содержимого под поршнем (суммарно во всех агрегатных состояниях);
3. количество теплоты Q , подведенной к сосуду **начиная с момента отрыва поршня от опор** и до момента окончания нагрева.

Задача №5. Термоисточник

Источник состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения \mathcal{E} и терморезистора, сопротивление которого зависит от температуры по закону

$$R = R_0 (1 + \alpha (t - t_0))$$

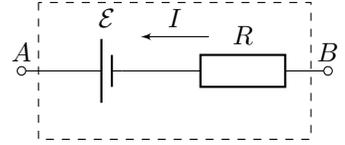


Рис. 7

где R_0 — сопротивление резистора при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$, t — установившаяся температура резистора, α — постоянный коэффициент.

На графике приведена нагрузочная кривая источника, т. е. зависимость установившегося напряжения U_{AB} между его клеммами от силы протекающего через него тока I . При протекании тока $I_1 = 0,55$ А цепь разрывается, т.к. резистор плавится. Температура плавления известна и равна $t_{\text{пл}} = 306^\circ\text{C}$. Мощность тепловых потерь в окружающую среду от нагретого до температуры t резистора равна $N = \beta (t - t_{\text{среды}})$, где β — постоянный неизвестный коэффициент. Считайте, что температура окружающей среды $t_{\text{среды}} = t_0$. Определите:

1. напряжение \mathcal{E} идеального источника;
2. сопротивление R_0 ;
3. напряжение U_{AB} между клеммами A и B , если к ним подключить резистор сопротивлением 10 Ом;
4. величину α ;
5. какую силу тока гарантированно не сможет пропускать аналогичный резистор, имеющий те же значения параметров R_0 и α , но очень высокую температуру плавления.

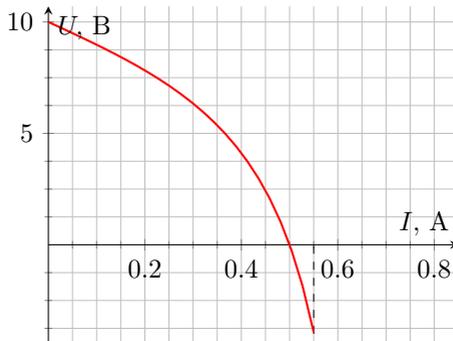


Рис. 8

11 класс

Задача №1. Две резинки

На горизонтальной поверхности в точке O удерживают шайбу массой m , связанную с двумя невесомыми резинками, продетыми через зафиксированные на этой поверхности гладкие колечки B и C . Другие концы резинок закреплены в точках A и D , при этом $AB = CD = L$, $BC = 2L$, $BO = CO = L\sqrt{2}$ (рис. 1). Длины обеих резинок в свободном состоянии равны L , а коэффициенты жёсткости $k_{OBA} = k$, $k_{OCD} = 3k$, где k — известная величина. Коэффициент трения шайбы о поверхность равен μ , а резинки не касаются поверхности. Ускорение свободного падения g . Шайбу отпускают.

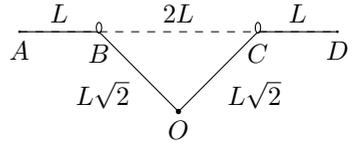


Рис. 1

1. Найдите максимальную скорость v_{max} шайбы в процессе дальнейшего движения.
2. Определите время τ от момента старта до момента, когда максимальная скорость достигается.

Задача №2. Цилиндр и клапан

В торце теплоизолированного цилиндра с поршнем установлен клапан (рис. 2), перекрывающий небольшое отверстие, который открывается и начинает пропускать воздух снаружи в цилиндр при перепаде давлений $\Delta p = p_0/3$ (p_0 — атмосферное давление). Воздух из цилиндра наружу клапан не пропускает. В начальный момент времени поршень прижат к торцу цилиндра, воздуха внутри нет.

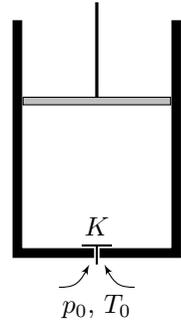


Рис. 2

В первом случае цилиндр заполняют воздухом до объема V_0 , медленно перемещая поршень, после чего останавливают, а затем освобождают поршень.

1. Определите температуру воздуха в цилиндре T_1 в момент остановки поршня при объеме V_0 , а также после освобождения поршня и прекращения его движения T_2 .

Во втором случае поршень резко перемещают в положение, при котором объем под поршнем равен V_0 , так что воздух не успевает проникнуть через клапан в цилиндр. В этом положении поршень фиксируют, ждут заполнения цилиндра воздухом, и так же, как в первом случае, освобождают поршень.

2. Определите и для этого случая температуру воздуха в цилиндре T'_1 после остановки поршня и заполнения цилиндра воздухом, и температуру T'_2 после освобождения поршня и прекращения его движения. Считайте, что процесс заполнения цилиндра воздухом происходит квазистатически, клапан закрывается мгновенно после того, как разность давлений оказывается меньше пороговой.

Снаружи цилиндра воздух при атмосферном давлении и температуре T_0 . Трением поршня о стенки, массой поршня, а также теплообменом воздуха с поршнем и стенками цилиндра можно пренебречь. Воздух можно считать двухатомным идеальным газом. После отпущения поршня клапан всё время остается закрытым.

Задача №3. Колебания заряда

Длинная диэлектрическая тонкостенная труба радиуса R , равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ , закреплена горизонтально в поле тяжести g . К верхней точке трубы одним концом прикреплена невесомая, нерастяжимая, непроводящая нить длины R , на другом конце нити маленький заряженный шарик массы m . Знаки зарядов шарика и трубы совпадают. Шарик сначала удерживают так, что нить не натянута, а затем отпускают. Через некоторое время движение прекращается, причем нить принимает форму прямого отрезка, перпендикулярного оси цилиндра.

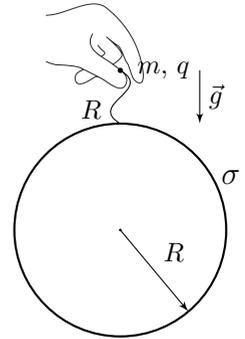


Рис. 3

1. Какие значения может принимать величина заряда шарика q ?
2. Определите величину силы натяжения нити при значениях заряда, полученных в первом пункте, и постройте график этой зависимости $T(q)$ с указанием характерных точек и участков.
3. Пусть модуль заряда шарика $|q|$, причем $|q| > 2\epsilon_0 mg/|\sigma|$. Определите период малых гармонических колебаний шарика, происходящих в плоскости рисунка.

Задача №4. Соленоид и виток

Полубесконечный соленоид с радиусом витков r и плотностью намотки n (число витков на единицу длины) расположен соосно круговому сверхпроводящему витку радиуса R так, что его основание находится в плоскости витка. Известно, что $r \ll R$. Изначально ток в витке отсутствовал. Индуктивность витка равна L . Силу тока в соленоиде медленно увеличивают от нуля до I и далее

поддерживают постоянной. Провода, подводящие ток к соленоиду, расположены таким образом, что их магнитным полем и их взаимодействием с другими элементами можно пренебречь. Направим ось x так, как показано на рисунке.

1. Точки A и C расположены в плоскости витка на расстояниях $r/3$ и $3r$ соответственно от оси симметрии системы. Найдите проекции индукции B_{Ax} и B_{Cx} магнитного поля, создаваемого соленоидом в точках A и C соответственно.
2. Найдите силу тока I_B в витке. Укажите, как он направлен.
3. Найдите величину и направление силы магнитного взаимодействия, действующей на соленоид со стороны витка.

Примечание: для бесконечного соленоида поле внутри соленоида однородное, вектор магнитной индукции направлен параллельно оси и его величина определяется формулой $B_0 = \mu_0 nI$. Снаружи бесконечного соленоида $\vec{B} = 0$.

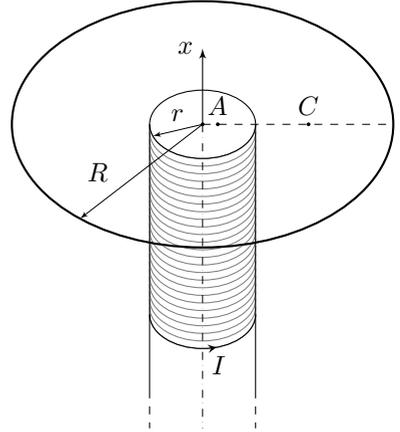


Рис. 4

Задача №5. Нелинейный элемент и конденсатор

Рассмотрим нелинейный элемент (рис. 5) такой, что при протекании через него тока в направлении от A к B зависимость напряжения U_{AB} от силы тока I описывается формулой

$$U_{AB} = U_1 + \frac{A}{I},$$

где $U_1 > 0$ и $A > 0$.

Если сила тока, текущего через элемент, равна нулю, то напряжение на нём может принимать любые значения. В противоположном направлении электрический ток протекать не может. На рисунке 6 качественно представлена ВАХ нелинейного элемента. В данной задаче рассматриваются две электрические цепи, содержащие данный нелинейный элемент.

Часть 1. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 7, состоит из источника постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора с сопротивлением R и нелинейного элемента с известными параметрами U_1 и A .



Рис. 5

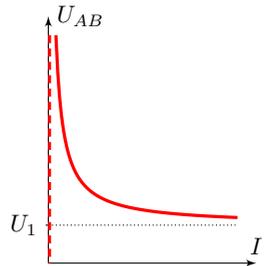


Рис. 6

1. При каких значениях напряжения источника U_0 в цепи может протекать постоянный электрический ток?

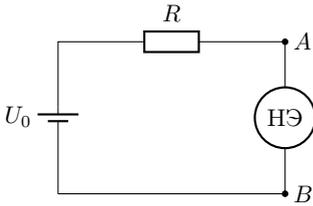


Рис. 7

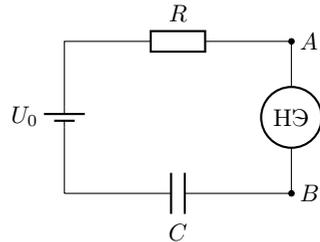


Рис. 8

Часть 2. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 8, состоит из источника постоянного напряжения U_0 с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора с сопротивлением R , конденсатора ёмкостью $C = 10$ мФ и нелинейного элемента, для которого $U_1 = 2$ В.

Изначально конденсатор не заряжен. Затем в результате кратковременного внешнего воздействия в цепи начинает протекать электрический ток. На рисунке 9 ниже (и на отдельном листе в увеличенном масштабе) представлен график зависимости напряжения на конденсаторе U_C от силы тока в цепи I .

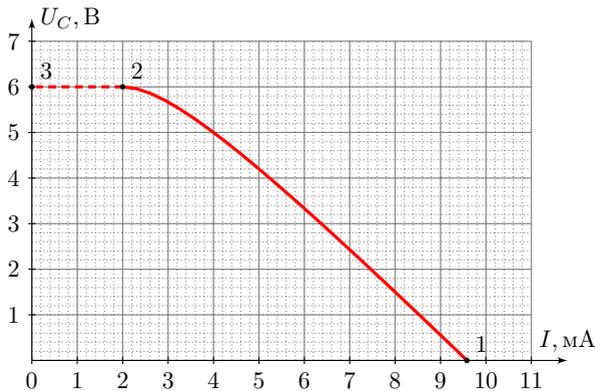


Рис. 9

Точка 1 соответствует моменту времени начала протекания тока, точка 2 — достижению максимального напряжения на конденсаторе, а пунктирная линия 23 — прекращению протекания в цепи электрического тока.

2. Найдите U_0 , R и A .

3. Найдите количество теплоты Q_R , выделившееся на резисторе за все время протекания тока в цепи.
4. Определите время τ , в течение которого в цепи протекал ток.

Возможные решения

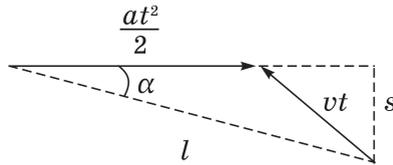
Задача №9-1. Автобус

Решение в СО дороги:

Для того чтобы выполнялось условие минимальности времени, Настя:

а) должна двигаться прямолинейно, т.к. в противном случае, у нее появилась бы возможность за то же время оказаться на дороге ближе к остановке, чем при криволинейном движении

б) не должна ждать автобуса на дороге, следовательно, девочка и автобус достигают точки встречи одновременно.



Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой l : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - s^2}}{l}$ (см. рисунок). Запишем теорему косинусов:

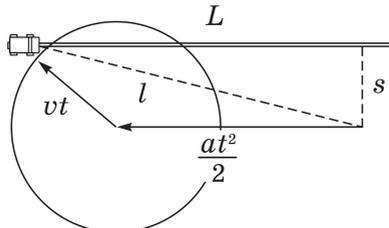
$$v^2 t^2 = l^2 - lat^2 \cos \alpha + \frac{a^2 t^4}{4}$$

Подставив косинус в уравнение получим:

$$v^2 t^2 = l^2 - at^2 \sqrt{l^2 - s^2} + a^2 t^4 / 4$$

Решение в СО автобуса:

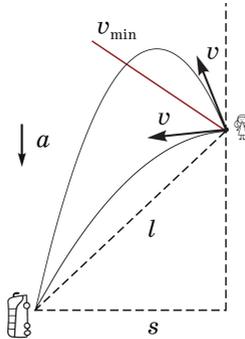
В системе отсчета автобуса точка из которой начала движение девочка за время t смещается параллельно дороге на расстояние $at^2/2$. За это время Настя может удалиться от этой точки на расстояние vt . Покажем эти перемещения на рисунке. Геометрическое место точек, в которых может оказаться девочка, имеет вид окружности. Минимальное время $t = \tau$ соответствует касанию окружности автобуса.



Обозначим начальное расстояние вдоль дороги между автобусом и Настей за L . Дважды запишем теорему Пифагора: $L^2 = l^2 - s^2$ и $(v\tau)^2 = (L - a\tau^2/2)^2 + s^2$.

«Баллистическое» решение

Можно воспользоваться методом аналогий. Равноускоренное движение девочки в системе отсчета автобуса эквивалентно движению тела, брошенного со скоростью v в поле однородной гравитации с ускорением свободного падения a . См. рисунок.



Тогда задача сводится к поиску времен движения тела с заданными начальной скоростью и ускорением в точку, находящуюся на расстоянии s по горизонтали и $\sqrt{l^2 - s^2}$ по вертикали. Минимальное время достигается при движении по «настильной» траектории. При таком подходе интуитивно понятным становится ОДЗ – не при любой начальной скорости тело сможет долететь до заданной точки.

Решая биквадратное уравнение относительно времени, получим:

$$\tau = \sqrt{\frac{4(aL + v^2) \pm \sqrt{4^2(aL + v^2)^2 - 16a^2l^2}}{2a^2}}$$

Видно, что подкоренное выражение всегда положительное, т.к.

$$4(aL + v^2) > \sqrt{4^2(aL + v^2)^2 - 16a^2l^2}.$$

Выбираем меньший из двух корней из соображений минимальности времени. Чтобы решение существовало, выражение под внутренним корнем должно быть положительным: $v^4 + 2v^2La - a^2s^2 > 0$, иначе Настя не успеет даже добежать до дороги, по которой пронесется автобус, быстро набравший большую скорость.

$$\tau = \sqrt{2 \frac{v^2 + La - \sqrt{v^4 + 2v^2La - a^2s^2}}{a^2}}$$

Задача №9-2. Черепахи

Поскольку скорости черепах все время направлены от одной черепахи к другой и постоянны по модулю, расстояния между каждой из них уменьшаются с постоянными скоростями. Обозначим скорости изменения расстояний AB , BC и AC за v_{AB} , v_{BC} и v_{AC} . Они равны:

$$v_{AB} = v_1 = v, v_{BC} = v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}}, v_{AC} = v_3 + \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Откуда находим:

$$t = \frac{l}{v}.$$

Поскольку углы в треугольнике ABC остаются постоянными, сохраняются и соотношения между его сторонами. Это означает, что скорости изменений сторон треугольника пропорциональны их длинам:

$$\frac{v_{AB}}{AB} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{v_{AC}}{AC}$$

Найдём v_3 :

$$\frac{v}{l} = \frac{\frac{v}{\sqrt{2}} + v_3}{L\sqrt{2}} \rightarrow v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично находим v_2 :

$$\frac{v}{l} = \frac{v_2 + v/2}{l} \rightarrow v_2 = v/2.$$

Ускорения черепах имеют только нормальную компоненту. Заметим, что в любой момент векторы скоростей черепах вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, равными угловой скорости ω вращения треугольника. Найдём эту угловую скорость, рассматривая движение второй черепахи относительно первой:

$$\omega = \frac{v_2}{AB} = \frac{v}{2AB}.$$

В начальный момент она равна:

$$\omega_0 = \frac{v}{2l}$$

Тогда для ускорений в начальный момент получим:

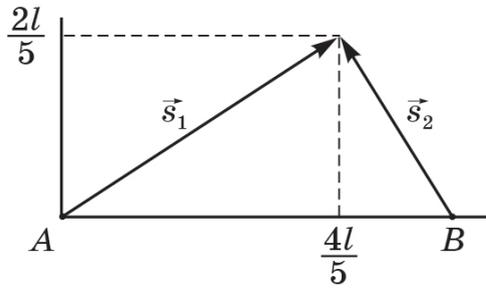
$$a_1 = \omega_0 v_1; a_2 = \omega_0 v_2; a_3 = \omega_0 v_3.$$

Откуда:

$$a_1 = \frac{v^2}{2l}; \quad a_2 = \frac{v^2}{4l}; \quad a_3 = \frac{v^2}{2\sqrt{2}l}.$$

Поскольку модуль вектора скорости второй черепахи всегда вдвое меньше модуля вектора скорости первой черепахи, а направления этих скоростей взаимно перпендикулярны, таким же будет соотношение между векторами их перемещений \vec{s}_1 и \vec{s}_2 . Так как черепахи встретились:

$$\vec{s}_1 = \vec{AB} + \vec{s}_2.$$



Применив теорему Пифагора для прямоугольного треугольника найдем:

$$s = s_1 = \frac{2l}{\sqrt{5}}.$$

Задача №9-3. Ап стену

В решении идет речь о проекциях скоростей на ось x , направленную к стене. Первое столкновение шайб:

Скорость центра масс: $u_{ц.м.} = u/2$, а проекции скоростей шайб в системе отсчета центра масс (СЦМ) равны $u/2$ и $-u/2$. Запишем энергию системы после столкновения в СЦМ, v – скорости после соударения:

$$mu^2 \cdot (1 - \alpha) = mv^2, v = \sqrt{1 - \alpha} \cdot u/2$$

Обозначим: $\beta = \sqrt{1 - \alpha}$. Возвращаясь в лабораторную СО, получим: $u_2 = -\beta u/2 + u/2 = (1 - \beta)u/2$, $u_1 = \beta u/2 + u/2 = (1 + \beta)u/2$. После удара, первая шайба будет двигаться в сторону стены, упруго от неё отразится и полетит обратно со скоростью $-u_1 = -(1 + \beta)u/2$.

Второе столкновение шайб:

Первая движется со скоростью $-(1+\beta)u/2$, а вторая ей навстречу с $(1-\beta)u/2$.
Скорость центра масс

$$u_{\text{ц.м.}} = \frac{(1-\beta)u/2 - (1+\beta)u/2}{2} = -\beta u/2$$

, а скорости шайб в СЦМ: $-u/2$ и $u/2$. После удара доля α энергии рассеивается и скорости в СЦМ становятся равными $\beta u/2$ и $-\beta u/2$. Возвращаясь в лабораторную СО, получим, что скорость второй шайбы станет равна $u_2 = -\beta u/2 - \beta u/2 = -\beta u$, а первой $u_1 = \beta u/2 - \beta u/2 = 0$, следовательно первая шайба остановится.

Три этапа для первой шайбы:

- 1) движение к стене со скоростью $(1+\beta)u/2$
- 2) движение от стены со скоростью $(1+\beta)u/2$
- 3) покой на расстоянии s_1 от стены

Найдем времена движения на двух первых участках: Время от первого соударения, до удара о стену:

$$t_1 = \frac{s}{(1+\beta)u/2} = \frac{2s}{(1+\beta)u}$$

За это время вторая шайба проходит расстояние:

$$s_2 = u_2 \cdot t_1 = (1-\beta)\frac{u}{2} \cdot \frac{2s}{(1+\beta)u} = \frac{(1-\beta)s}{1+\beta},$$

и, следовательно, расстояние от второй шайбы до стены, или расстояние между шайбами после удара первой шайбы о стенку, равно:

$$s - \frac{(1-\beta)s}{1+\beta} = \frac{2\beta}{1+\beta}s$$

Шайбы сближаются со скоростью $(1+\beta)u/2 + (1-\beta)u/2 = u$. Второе столкновение происходит через:

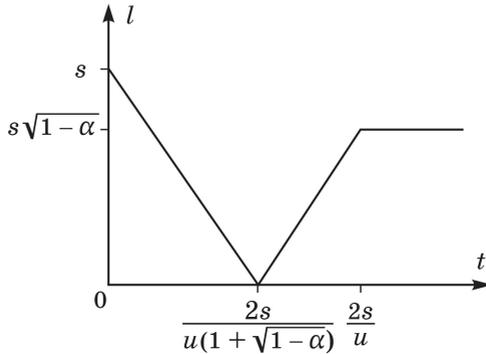
$$t_2 = \frac{2\beta}{1+\beta} \frac{s}{u}, t_1 + t_2 = \frac{2s}{u}$$

К этому результату можно прийти проще: По ЗСИ $mu_{\text{л}} + mu_{\text{п}} = mu \rightarrow u = v_1 + v_2$. Тогда суммарное перемещение двух шайб между ударами $2s = u_{\text{л}}t + u_{\text{п}}t = ut$, и $t = \frac{2s}{u}$ Первая шайба удалится от стены на расстояние:

$$s_1 = \frac{2\beta}{1+\beta} \frac{s}{u} \cdot \frac{1+\beta}{2} u = \beta s = s\sqrt{1-\alpha}$$

Там она и остановится.

График $l(t)$ имеет вид:



Задача №9-4. Ледяная картина

Ответ на первый вопрос задачи можно найти сразу с помощью диаграммы состояний. Для $0,5$ кг льда $1/m_{\text{л}} = 2 \text{ кг}^{-1}$. Точка соответствующая такой массе и температуре -10°C попадает в область между зонами льда и воды, а значит соответствует смеси, находящейся в равновесном состоянии при температуре 0°C .

Чтобы найти начальную массу и температуру воды запишем уравнения теплового баланса для геометрического множества точек границ зон льда и воды.

Все точки правой границы зоны льда соответствуют конечному состоянию, в котором все содержимое сосуда окажется в виде льда при 0°C .

$$m_{\text{л}}c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) = mc(t - 0) + m\lambda,$$

откуда

$$t_{\text{л}} = -\frac{m(ct + \lambda)}{c_{\text{л}}} \cdot \frac{1}{m_{\text{л}}}$$

Коэффициент наклона $\frac{m(ct + \lambda)}{c_{\text{л}}}$ находим из графика. Он равен $k_1 = 55^\circ\text{C}\cdot\text{кг}$.

Все точки левой границы зоны воды соответствуют конечному состоянию, в котором все содержимое сосуда окажется в виде воды при 0°C .

$$m_{\text{л}}c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + m_{\text{л}}\lambda = mc(t - 0),$$

откуда

$$t_{\text{л}} = \frac{\lambda}{c_{\text{л}}} - \frac{mct}{c_{\text{л}}} \cdot \frac{1}{m_{\text{л}}}$$

Коэффициент наклона $\frac{mct}{c_{\text{л}}}$ находим из графика. Он равен $k_2 = 29 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{кг}$.

Остается решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{m(ct + \lambda)}{c_{\text{л}}} = k_1, \\ \frac{mct}{c_{\text{л}}} = k_2 \end{cases}$$

Разделим верхнее уравнение на нижнее $1 + \frac{\lambda}{ct} = \frac{k_1}{k_2}$, и найдём:

$$t = 88 \text{ }^\circ\text{C}$$

Массу воды можно найти, подставив найденную температуру, например, во второе уравнение системы.

$$m = \frac{c_{\text{л}}k_2}{ct} = 165 \text{ г}$$

Учитывая, что исходные данные взяты из графика, допускаются отклонения от авторских значений для температуры в диапазоне от $84 \text{ }^\circ\text{C}$ до $92 \text{ }^\circ\text{C}$, а для массы от 160 г до 170 г .

Альтернативное решение «по двум точкам»:

На правой прямой при температуре льда равной нулю остывание воды до нуля полностью плавит лед: $m_{\text{л}2}\lambda = mct$, где $m_{\text{л}2} = 1/5,4 \text{ кг}$. На левой прямой лед, нагреваясь до нуля, охлаждает воду до нуля и кристаллизует ее. Берем любую точку на этой прямой, например $m_1 = 1/0,4 \text{ кг}$ и $t_{\text{л}1} = -22 \text{ }^\circ\text{C}$, уравнение имеет вид:

$$m_{\text{л}1}c_{\text{л}}t_{\text{л}1} = mct + m\lambda$$

Вычитая из второго уравнения первое получаем:

$$m = 0,165 \text{ кг}$$

$$t = 88 \text{ }^\circ\text{C}$$

Задача №9-5. Электроцикл

Стрелки процессов указывают на то, что от состояния 1 до состояния 3 сила тока увеличивается, а затем уменьшается до начального значения. По условию это происходит с постоянной по модулю скоростью.

Из графика следует, что на участках 1 – 2 и 3 – 4 токи текут только через резисторы. Действительно, если на участке 1 – 2 был бы открыт один из диодов, то при изменении силы тока I показания вольтметра совпадали бы с напряжением открытия диода и не изменялись.

При напряжениях 4 В и 8 В диоды открываются и сила тока на участках 4 – 1 и 2 – 3 изменяется при неизменных показаниях вольтметра. Следовательно,

$$U_{01} = 4 \text{ В}, U_{02} = 8 \text{ В}$$

Сопротивления фрагмента на участках 1–2 и 3–4 отличаются, что следует из различных коэффициентов наклона участков диаграммы, причем $R_{34} < R_{12}$. Откуда

$$R_{12} = R_1, R_{34} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Заметим, что сила тока через резистор R_1 на всем участке 2–3 не изменится, а увеличение общего тока компенсируется увеличением тока через диод D_2 .

Так же заметим, что ключ K_2 до завершения участка 2–3 замыкаться не мог, так как при неизменном общем токе это привело бы к мгновенному уменьшению сопротивления фрагмента и напряжения на нем. Диод сразу бы закрылся, и система перешла в состояние, соответствующее такому же току на участке 3–4.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что на участке 4–1 ток также идет только через резистор R_1 . Если в т.4 не разомкнуть ключ K_2 , отключив резистор R_2 , дальнейшее уменьшение общего тока приведет к закрытию диода и переходу системы в состояние, находящееся на продолжении процесса 3–4.

Обозначим силу тока в т.1 за I_0 . Тогда количество теплоты Q_{23} , выделившееся на резисторе R_1 на участке 2–3, может быть найдено по формуле $Q_{23} = 2I_0 U_2 t_{23}$. С другой стороны, за время t_{23} сила тока возросла с $2I_0$ до $6I_0$. Поэтому $4I_0 = kt_{23}$.

Решая систему, получим:

$$I_0 = \sqrt{\frac{kQ_{23}}{8U_2}} = 0,01 \text{ А.}$$

За цикл сила тока в цепи увеличивалась от I_0 до $6I_0$, а затем уменьшалась на такую же величину. Длительность одного цикла равна

$$\tau = 2 \cdot \frac{50 \text{ мА}}{1 \frac{\text{мА}}{\text{с}}} = 100 \text{ с.}$$

В т.4 замыкается ключ K_1 и одновременно размыкается ключ K_2 , в результате чего через D_1 сразу идет ток $2I_0$, который постепенно уменьшается до нуля (в состоянии 1). Через резистор R_1 на всем процессе 4–1 идет постоянный ток I_0 .

Аналогично тому как было найдено Q_{23} , найдем и Q_{41} . $Q_{41} = I_0 U_1 t_{41}$, где $t_{41} = 2I_0/k = 20 \text{ с.}$

$$Q_{41} = 0,8 \text{ Дж.}$$

Сопротивления R_{34} и R_{12} можно рассчитать через коэффициенты наклона соответствующих прямых: $R_1 = 400 \text{ Ом}$, $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 133 \text{ Ом}$, откуда $R_2 = 200 \text{ Ом}$.

Можно предложить такую последовательность действий, приводящую к заданному виду цикла.

1 – 2: Ключи разомкнуты. Ток течет только через R_1 . Второй диод закрыт.
 2 – 3: Открывается диод. Ток идет через R_1 и второй диод. 3 – 4: Замыкают второй ключ. Диод закрывается. Силу тока начинают уменьшать. 4 – 1: Когда напряжение в цепи уменьшилось до 4 В, замыкают первый ключ и одновременно размыкают второй ключ. Первый диод открывается. В конце участка первый ключ опять размыкают.

Задача №10-1. Три тигра

Поскольку углы в треугольнике, образованном тиграми, остаются постоянными, то в любой момент времени образованный тиграми треугольник подобен исходному. Из этого следует, что все тигры встретятся одновременно.

Найдем скорость изменения расстояния AB . Так как модули скоростей тигров и углы между ними остаются постоянными, то искомая скорость равна $v_{AB} = v_1$ и она постоянна. Время до встречи первого и второго тигров равно $t = L/v$.

Выразим скорости изменения расстояний BC и AC :

$$v_{BC} = v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}},$$

$$v_{AC} = v_3 + \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку углы в треугольнике ABC остаются постоянными, сохраняются и соотношения между его сторонами. Это означает, что скорости изменений сторон треугольника им пропорциональны:

$$\frac{v_{AB}}{AB} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{v_{AC}}{AC}.$$

Найдём v_{AC} :

$$\frac{v}{L} = \frac{v_3 + \frac{v}{\sqrt{2}}}{L\sqrt{2}} \Rightarrow v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Теперь найдём v_{BC} :

$$\frac{v}{L} = \frac{v_2 + \frac{v}{2}}{L} \Rightarrow v_2 = \frac{v}{2}.$$

Поскольку модуль скорости второго тигра всегда вдвое меньше модуля скорости первого тигра, а направления скоростей в любой момент взаимно перпендикулярны, то траектории их движения будут подобны друг другу с коэффициентом подобия 2:1. Отсюда следует, что вектора перемещения также будут взаимно перпендикулярны и отличаться по модулю в два раза.

Можно доказать это и строго математически. Рассмотрим малый момент времени dt . Пусть угол между скоростью первого тигра и осью x равен α , тогда угол между скоростью второго тигра и осью x будет равен $\alpha + 90^\circ$. Запишем изменения координат тигров за малое время:

$$dx_1 = v \cos \alpha \cdot dt,$$

$$dy_1 = v \sin \alpha \cdot dt,$$

$$dx_2 = \frac{v}{2} \cos(\alpha + 90^\circ) \cdot dt = -\frac{v}{2} \sin \alpha \cdot dt,$$

$$dy_2 = \frac{v}{2} \sin(\alpha + 90^\circ) = \frac{v}{2} \cos \alpha \cdot dt.$$

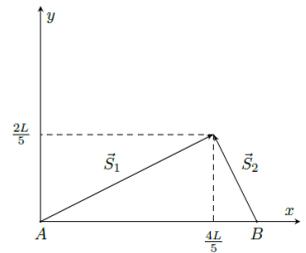
Из полученных уравнений видно, что для любого момента времени $dx_1 = 2dy_2$, $dy_1 = -2dx_2$, это означает, что вектора полных перемещений также отличаются в два раза по модулю и взаимно перпендикулярны.

Поскольку тигры встретились: $\vec{S}_1 = \vec{AB} + \vec{S}_2$. Тогда из прямоугольного треугольника находим: $(x_B, y_B) = (4L/5, 2L/5)$.

Величины ускорений тигров не должны превышать μg , поскольку сила трения — единственная сила, действующая на них в горизонтальной плоскости.

Ускорения тигров имеют только нормальную компоненту. Заметим, что в любой момент векторы скоростей тигров вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, равными угловой скорости ω вращения треугольника в данный момент времени. Найдём её, рассматривая движение второго тигра относительно первого:

$$\omega = \frac{v_2}{AB} = \frac{v}{2AB},$$



тогда для ускорений получим: $a_1 = \omega v_1$, $a_2 = \omega v_2$, $a_3 = \omega v_3$.

Ускорение первого тигра a_1 всегда больше ускорений двух других, значит, он первым не сможет поддерживать данное движение. Для зависимости a_1 от времени t получим:

$$a_1(t) = \frac{v^2}{2(L - vt)} \leq \mu g,$$

откуда:

$$t \leq \frac{L}{v} - \frac{v}{2\mu g}.$$

Проанализируем полученный ответ. При малых значениях коэффициента трения тигры не смогут даже начать такое движение, поэтому: $\tau = 0$ при $\mu \leq \frac{v^2}{2gL}$, иначе: $\tau = \frac{L}{v} - \frac{v}{2\mu g}$ при $\mu > \frac{v^2}{2gL}$.

Задача №10-2. Поле цилиндра

Электрическое поле внутри металлического цилиндра равняется нулю. Значит, заряды распределятся по его поверхности так, что создаваемое ими внутри цилиндра электрическое поле равно $\vec{E} = -\vec{E}_0$. Так как распределение зарядов на поверхности второго цилиндра такое же, как на первом, то внутри него создано однородное электрическое поле с напряженностью $-\vec{E}_0$.

При перемещении точечного заряда из левой точки в правую уже сила тяжести не совершит работу. Изменение потенциальной энергии будет равно минус работе электрического поля: $\Delta W_{\text{пот}} = -A_E = 2qE_0R$.

Способ №1.

Введем декартову систему координат, связанную с центром цилиндра. Ось x направим горизонтально вправо, а ось y – вертикально вверх. Запишем функцию потенциальной энергии в зависимости от угла θ .

$$W_{\text{пот}}(\theta) = mgR \sin \theta + E_0qR \cos \theta$$

Обозначим $A = R\sqrt{(mg)^2 + (E_0q)^2}$, тогда

$$W_{\text{пот}}(\theta) = A \left(\frac{mgR}{A} \sin \theta + \frac{E_0qR}{A} \cos \theta \right).$$

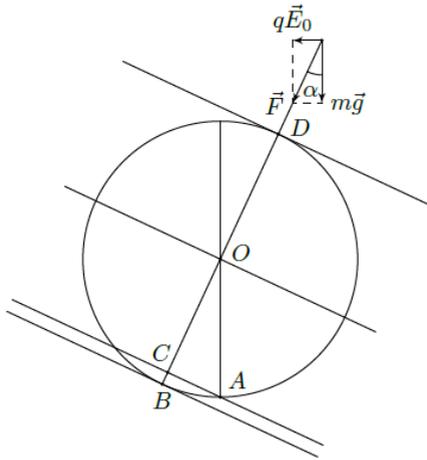
Введем угол $\alpha = \arcsin \frac{mgR}{A}$. Легко заметить, что $\cos \alpha = \frac{E_0qR}{A}$, тогда выражение для потенциальной энергии примет вид $W_{\text{пот}}(\theta) = A \cos(\theta - \alpha)$.

Скорость будет максимальной в точке, где энергия минимальна. Минимум потенциальной энергии равен $W_{\text{мин}} = -A$. Начальная потенциальная энергия равна $W_0 = -mgR$.

Запишем закон сохранения энергии $W_0 + \frac{mv_0^2}{2} = W_{\min} + \frac{mv_{\max}^2}{2}$. Отсюда

$$v_{\max} = \sqrt{\left(v_0^2 + \frac{2R}{m} \left(\sqrt{(mg)^2 + (E_0q)^2} - mg\right)\right)} = \sqrt{v_0^2 + 2R \left(\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE_0}{m}\right)^2} - g\right)}.$$

Способ №2.



Поле силы тяжести и электростатическое поле однородны, поэтому на шарик будет действовать постоянная равнодействующая F , направленная под углом α к вертикали. $x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{E_0q}{mg}$, $F = \frac{mg}{\cos \alpha} = mg\sqrt{x^2 + 1}$. При действии постоянной силы потенциальная энергия определяется как $W_{\text{пот}} = Fh$, где ось h направлена противоположно направлению силы.

Запишем закон сохранения энергии

$$W_0 + \frac{mv_0^2}{2} = W_{\min} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Минимальная потенциальная энергия будет в точке B .

$$W_0 - W_{\min} = F \cdot CB = FR(1 - \cos \alpha) = mgR \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)$$

Отсюда

$$v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + 2gR(\sqrt{x^2 + 1} - 1)} = \sqrt{v_0^2 + 2Rg \left(\sqrt{\left(\frac{qE_0}{m}\right)^2 + 1} - 1 \right)}.$$

Способ №1.

Чтобы точечный заряд мог совершить полный оборот, его скорость в любой точке должна быть больше нуля, и сила реакции опоры со стороны оболочки также должна быть больше нуля.

Так как заряд находится в однородном поле сил, являющемся суммой поля тяжести и электрического поля, то максимум потенциальной энергии достигается в точке, где результирующая сила, действующая со стороны поля, перпендикулярна поверхности цилиндра.

Запишем условие отсутствия отрыва

$$ma_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R} > \sqrt{(mg)^2 + (E_0q)^2}.$$

Выразим кинетическую энергию в этой точке

$$W_{\min} = \frac{mv^2}{2} > \frac{A}{2}.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = W_{\min} + A,$$

откуда

$$v_0 > \sqrt{\frac{2R}{m} \left(\frac{3}{2} \sqrt{(mg)^2 + (E_0q)^2} + mg \right)}.$$

Способ №2.

Чтобы точечный заряд мог совершить полный оборот, его скорость в любой точке должна быть больше нуля, и сила реакции опоры со стороны оболочки также должна быть больше нуля.

Максимум потенциальной энергии достигается в точке D , где результирующая сила, действующая со стороны поля, перпендикулярна поверхности цилиндра. Запишем закон сохранения энергии

$$W_0 + \frac{mv_0^2}{2} = W_D + \frac{mv^2}{2},$$

где $W_D - W_0 = F \cdot CD = FR(1 + \cos \alpha) = mgR(\sqrt{x^2 + 1} + 1)$.

Запишем условие отсутствия отрыва:

$$ma_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R} > F,$$

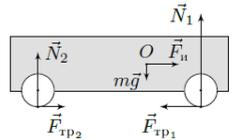
т.е. $v_0^2 = \frac{2}{m}(W_D - W_0) + v^2 > 2gR(\sqrt{x^2 + 1} + 1) + gR\sqrt{x^2 + 1}$ или

$$v_0 > \sqrt{Rg \left(3\sqrt{\left(\frac{qE_0}{mg}\right)^2 + 1} + 2 \right)}.$$

Задача №10-3. Электрическая тележка

Способ №1.

Введем ось x , направленную горизонтально вправо. Пусть тележка движется с горизонтальным ускорением \vec{a} . Перейдем в НИСО, связанную с центром масс тележки, при этом добавится сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$, приложенная к центру масс. Также на тележку будут действовать сила тяжести mg , силы нормального давления N_1 и N_2 со стороны дороги, силы трения μN_1 и μN_2 , направленные против скорости нижних точек колёс.



В выбранной системе отсчета тележка покоится, поэтому сумма действующих на нее сил должна быть равна нулю и сумма моментов сил тоже должна быть равна нулю.

Рассмотрим сумму моментов сил относительно точки касания пола левым колесом:

$$mg(l + x) - N_2 \cdot 2l - ma_x h = 0.$$

Выразим силу N_2 :

$$N_2 = \frac{mg(l + x) - ma_x h}{2l}.$$

Аналогично поступим с правым колесом:

$$N_1 \cdot 2l - mg(l - x) - ma_x h = 0,$$

$$N_1 = \frac{mg(l - x) + ma_x h}{2l}.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

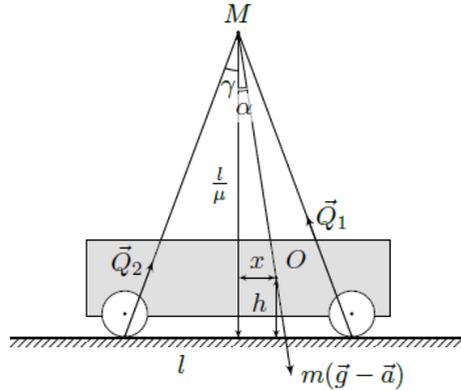
$F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} - ma_x = 0$. Так как по условию колеса начинают быстро вращаться, то

они проскальзывают по полу. В таком случае $F_{\text{тр}i} = N_i$. Учитывая это выразим ускорение:

$$a_x = \frac{gx}{h-l}.$$

По условию $\mu < l/h$, значит $a_x < 0$, значит тележка будет двигаться влево с ускорением, равным по модулю $a = \frac{\mu gx}{l - \mu h}$.

Способ №2.



Пусть \vec{a} — ускорение тележки. Объединим силы нормальных реакций опор и трения, действующие на колёса, в полные реакции опор $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}$.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с тележкой. В данной системе отсчёта все силы можно свести к трём: полным реакциям опоры $\vec{Q}_л$ и $\vec{Q}_п$, действующим на левую и правую пары колёс соответственно, а также равнодействующей сил тяжести и инерции $m(\vec{g} - \vec{a})$, приложенной к центру масс тележки.

Поскольку в этой системе отсчёта тележка покоится и на нее действуют силы, приложенные к трём точкам, то по теореме о трёх непараллельных силах продолжения линий действия этих сил пересекаются в одной точке M. Учитывая, что полные реакции опор составляют угол $= \text{arctg } \mu$ с вертикалью, они пересекутся в точке M, находящейся над серединой тележки на высоте $OM = l/\mu$ над поверхностью. Изобразим это на рисунке.

Тогда равнодействующая сил тяжести и инерции должна составлять с вертикалью угол $= \text{arctg } \frac{x}{l/\mu - h}$.

Отсюда ускорение тележки равно $a = g \text{tg } \alpha = \frac{\alpha gx}{l - \mu h}$ и направлено влево.

Способ №1.

Найдем условие отсутствия переворота. Если тележка не переворачивается, то $N_1, N_2 > 0$.

Для первого условия

$$\frac{mg(l+x) - m \frac{\mu gx}{\mu h - l} h}{2l} > 0$$

получим $x > h - l$.

Рассмотрим второе условие

$$\frac{mg(l-x) + m \frac{\mu gx}{\mu h - l} h}{2l} > 0,$$

откуда получим $x < l - \mu h$.

Заметим, что с учетом ограничения, данного в условии задачи, второе условие ($\mu h - l < 0$) выполняется всегда. Окончательно получим $x < l - \mu h$.

Способ №2.

Если $\vec{Q}_п$ проходит ниже центра масс электрокара, то для отсутствия вращения необходимо отрицательное значение нормальной реакции опоры, действующей на левую пару колёс, что невозможно. Значит, левая пара колёс отрывается от поверхности.

Колёса не отрываются при условии $\mu < (l-x)/h$ или $x < l - \mu h$.

Задача №10-4. Неизвестная жидкость под поршнем

Из условия следует, что поршень оторвался от опор и поднялся на высоту $2H$. Если поршень не лежит на опорах, то на него действуют только три силы: сила тяжести, сила атмосферного давления и сила давления паров жидкости. Так как первые две силы постоянны, то и третья будет постоянной. На графике мы видим конечный участок нагрева, на котором давление паров постоянно, следовательно, на этом участке поршень не лежит на опорах. Запишем условие его равновесия.

$$1.5 p_0 S = Mg + p_0 S,$$

откуда:

$$M = \frac{p_0 S}{2g} = \frac{10^5 \cdot 0.01}{2 \cdot 9.8} = 51 \text{ кг}$$

По условию, изначально под поршнем была только жидкость, а затем установилось термодинамическое равновесие. Значит, возможны два варианта: либо

под поршнем изначально находится только пар, либо смесь жидкости и ее насыщенного пара. Если бы к окончанию процесса нагрева жидкость испарилась не полностью, то при постоянном давлении содержимого (равном давлению насыщенного пара жидкости) была бы постоянна и его температура. Из графика видно, что температура содержимого на последнем этапе возрастала при постоянном давлении. Следовательно, к моменту достижения поршнем высоты $2H$ вся жидкость испарилась. Запишем уравнение состояния в момент достижения поршнем высоты $2H$:

$$1.5 p_0 \cdot 2SH = \frac{m_0 R \cdot 1.5 T_0}{\mu}$$

откуда:

$$m_0 = \frac{2\mu p_0 SH}{RT_0} = \frac{2 \cdot 0.018 \cdot 10^5 \cdot 0.01 \cdot 1}{8.31 \cdot 350} = 12.4 \text{ г}$$

Из уравнения состояния найдём массу пара $m_{\text{п1}}$ под поршнем в момент его отрыва от опор:

$$m_{\text{п1}} = \frac{1.5 p_0 SH \mu}{1.1 T_0 R} = 8,4 \text{ г}$$

Заметим, что $m_{\text{п1}} < m_0$, это означает, что процесс подъема поршня можно разделить на два этапа. На первом этапе под поршнем при постоянной температуре находится насыщенный пар и жидкость продолжает испаряться. На втором этапе все содержимое цилиндра оказывается в газообразном состоянии и происходит изобарическое расширение с увеличением температуры.

Первый этап представлен на графике одной точкой с координатами $(1.1 T_0; 1.5 p_0)$, а второй — горизонтальным отрезком.

Рассмотрим, на что тратится энергия на первом этапе. Жидкость испаряется, при этом часть энергии тратится на разрушение энергии связей между молекулами жидкости $\Delta U_{\text{жидк}}$, а часть — на работу по расширению образовавшегося пара в окружающую среду $A_1 = p(V_{\text{г}} - V_{\text{ж}})$. Величина $\Delta U_{\text{жидк}}$ зависит от температуры, при которой происходит фазовый переход. Покажем, что, если объемом вещества в жидком состоянии можно пренебречь по сравнению с объемом в газообразном состоянии, то величина A_1 так же определяется температурой и не зависит от внешнего давления. Действительно, в условиях приближения $A_1 = pV_{\text{г}} = \nu_{\text{г}} RT$, где $\nu_{\text{г}}$ — количество испарившегося вещества. По определению удельная теплота парообразования включает в себя как затраты энергии на разрыв связей между молекулами, так и затраты энергии на совершение работы по расширению в атмосферу. Теплоту Q_1 , подведенную на первом этапе, можем выразить:

$$Q_1 = L(m_0 - m_{\text{п1}}).$$

На втором этапе происходит изобарический нагрев пара от температуры $1.1T_0$ до $1.5T_0$. Так как по условию пар можно считать многоатомным газом, то его молярная теплоемкость в данном процессе равна $c_p = 4R$, и эта теплоемкость учитывает как изменение внутренней энергии газа, так и работы по расширению как против сил атмосферного давления, так и против силы тяжести поршня. Тогда тепло, подведенное на втором этапе, можно выразить:

$$Q_2 = \frac{c_p m_0 (1.5T_0 - 1.1T_0)}{\mu} = \frac{16}{5} p_0 S H.$$

Общее количество теплоты, подведенное в процессе подъема поршня:

$$Q = Q_1 + Q_2 = p_0 S H \left(\frac{7\mu L}{11RT_0} + \frac{16}{5} \right) = 10^3 \cdot (8.7 + 3.2) = 11.9 \text{ кДж}$$

Задача №10-5. Термоисточник

При протекании через резистор тока I он нагревается до температуры t . В стационарном режиме, выделяющаяся электрическая мощность равна мощности тепловых потерь. Следовательно, $\beta(t - t_0) = I^2 R_0 (1 + \alpha(t - t_0))$, где β — коэффициент тепловых потерь. Откуда

$$t - t_0 = \frac{I^2 R_0}{\beta - I^2 R_0 \alpha}.$$

Установившееся напряжение между клеммами A и B задается выражением:

$$U_{AB} = \mathcal{E} - IR_0 (1 + \alpha(t - t_0)).$$

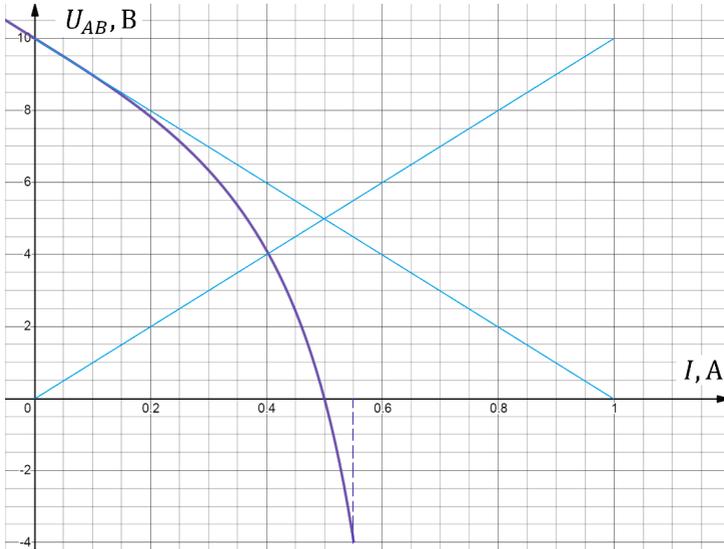
Решая систему уравнений, получим:

$$U_{AB} = \mathcal{E} - \frac{IR_0 \beta}{\beta - I^2 R_0 \alpha}.$$

При $I = 0$ $U_{AB} = \mathcal{E}$. Из графика найдем $\mathcal{E} = 10$ В.

При малых I выражение (*) упрощается до: $U_{AB} = \mathcal{E} - IR_0$.

Проведем касательную к начальному участку графика. Из углового коэффициента определяем $R_0 = 10$ Ом.



Напряжение на клеммах A и B , при подключении к ним резистора с сопротивлением 10 Ом , найдем графически. Построим ВАХ резистора на графике с нагрузочной кривой. Пересечение графиков даст искомый ответ 4.0 В .

График пересекает ось абсцисс при силе тока 0.5 А . При этом

$$\mathcal{E} = \frac{IR_0\beta}{\beta - I^2R_0\alpha},$$

следовательно, $\beta/\alpha = 5.0 \text{ Вт}$. Аналогичное значение получается при подстановке других точек. При температуре плавления

$$t_{\text{пл}} - t_0 = \frac{I_1^2 R_0}{\beta - I_1^2 R_0 \alpha} = \frac{3.025}{1.975\alpha} = 306 \text{ }^\circ\text{C},$$

откуда

$$\alpha = 5.1 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

Выразим ток в зависимости от температуры

$$I^2 = \frac{\beta(t - t_0)}{R_0(1 + \alpha(t - t_0))} = \frac{\beta}{R_0(1/(t - t_0) + \alpha)}.$$

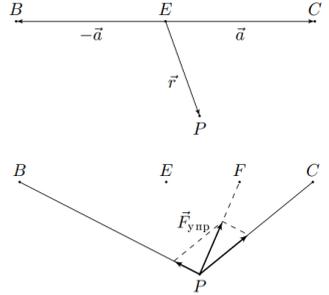
При $t \rightarrow \infty$, $I \rightarrow I_{\text{макс}} = \sqrt{\beta/(R_0\alpha)} = 0.71 \text{ А}$. Значит любой ток более 0.71 А резистор гарантированно не сможет пропустить ни при какой температуре плавления.

Задача №11-1. Две резинки

Найдём равнодействующая сил упругости, действующих на шайбу при её произвольном положении. Обозначим положение шайбы точкой P , середину отрезка BC – точкой E . Также обозначим векторы $\vec{EP} = \vec{r}$, $\vec{EC} = \vec{a}$ (рис.1.)

Тогда удлинения резинок равны длинам отрезков BP и CP , а равнодействующая сил упругости:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k(\vec{r} + \vec{a}) - 3k(\vec{r} - \vec{a}) = -4k \left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right)$$



Таким образом, равнодействующая сила всегда направлена к точке F , являющейся серединой отрезка EC (рис.2), и пропорциональна расстоянию до неё от точки P с коэффициентом жёсткости $4k$. Следовательно, всё движение шайбы будет происходить по прямой OF , как если бы она находилась под воздействием пружины с коэффициентом жесткости $4k$ и имела положение равновесия в точке F .

Задача свелась к исследованию движения по прямой в присутствии сухого трения. Длина отрезка OF равна $l_0 = \frac{L\sqrt{5}}{2}$, начальное значение силы упругости $F_0 = 2\sqrt{5}kL$. Если максимальная сила трения покоя превышает её, то есть $\mu mg \geq 2\sqrt{5}kL$ - шайба не начнет движение, и её скорость останется равной 0. В противном случае шайба придет в движение, для описания которого введем ось x с началом в точке F , направленную к точке O . Уравнение движения шайбы от момента начала движения до момента первой остановки шайбы:

$$ma_x = -4kx + \mu mg$$

заменой $x' = x - \frac{\mu mg}{4k}$ приводится к уравнению гармонических колебаний

$$ma'_x = -4kx'$$

с нулевой начальной скоростью и начальным отклонением от «смещенного» положения равновесия $l_1 = l_0 - \frac{\mu mg}{4k}$. Тогда ясно, что максимальная скорость шайбы достигается при прохождении «смещенного» положения равновесия и определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{4kl_1^2}{2} \Rightarrow v_{\text{max}} = 2l_1 \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5k}{m}}L - \frac{\mu g}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

После этого момента времени скорость шайбы будет уменьшаться вплоть до остановки, после которой нам снова нужно будет сравнивать силу упругости пружины с максимальной величиной силы трения (чтобы выяснить, начнется ли возвратное движение шайбы). Но в любом случае, поскольку механическая энергия системы убывает за счет работы силы трения, максимумы скорости на новых полупериодах движения будут меньше уже найденного.

Как было показано при решении первого пункта, при $\mu mg < 2\sqrt{5}kL$ максимальная скорость движения шайбы достигается в её положении равновесия, т.е. через четверть периода колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$ после старта. При $\mu mg \geq 2\sqrt{5}kL$ - движение не начнётся.

Задача №11-2. Цилиндр и клапан

При заполнении цилиндра снаружи внутрь перемещается позиция воздуха объёма V_1 при атмосферном давлении и температуре T_0 (рис.1.)

Внутри воздух находится при давлении $p_0 - \Delta p$. Закон сохранения энергии для этой порции учетом работы сил атмосферного давления $A_{\text{внеш1}} = p_0 V_1$ и работы газа внутри цилиндра при перемещении поршня $A_{\text{газ1}} = (p_0 - \Delta p)V_0$ выглядит так:

$$\frac{5p_0 V_1}{2} + p_0 V_1 - (p_0 - \Delta p)V_0 = \frac{5(p_0 - \Delta p)V_0}{2}.$$

Отсюда:

$$V_1 = \frac{p_0 - \Delta p}{p_0} V_0 = \frac{2V_0}{3}.$$

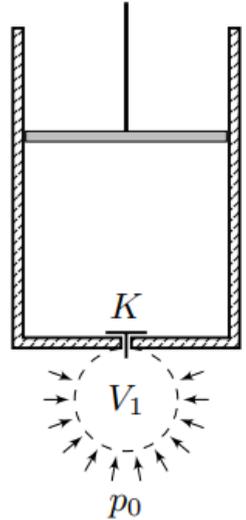
Из уравнения состояния можно определить температуру воздуха внутри цилиндра T_1 :

$$\frac{p_0 V_1}{T_0} = \frac{(p_0 - \Delta p)V_0}{T_1},$$

откуда

$$T_1 = T_0.$$

Итак, температура воздуха в цилиндре после заполнения равна T_0 . После освобождения поршня он совершает колебания, которые затухают из-за вязкого трения в газе. Пусть после остановки поршня объём воздуха под ним равен $V_0 - \Delta V_1$.



Работа внешнего давления над поршнем равна $p_0 \Delta V_1$. Закон сохранения энергии:

$$\frac{5(p_0 - \Delta p)V_0}{2} + p_0 \Delta V_1 = \frac{5p_0(V_0 - \Delta V_1)}{2}.$$

Отсюда:

$$\Delta V_1 = \frac{5\Delta p}{7p_0}V_0 = \frac{5V_0}{21}.$$

Из уравнения состояния

$$\frac{(p_0 - \Delta p)V_0}{T_1} = \frac{p_0(V_0 - \Delta V_1)}{T_2}.$$

Отсюда:

$$T_2 = \frac{8T_0}{7}.$$

Отличие от первого случая состоит в том, что воздуха в цилиндре в процессе перемещения поршня нет и работа газа над поршнем $A_{\text{газ2}}$ равна нулю. Закон сохранения энергии

$$\frac{5p_0V_2}{2} + p_0V_2 = \frac{5(p_0 - \Delta p)V_0}{2},$$

откуда:

$$V_2 = \frac{5(p_0 - \Delta p)}{7p_0}V_0 = \frac{10V_0}{21}.$$

Здесь V_2 – объем порции газа, переходящий снаружи в цилиндр, при p_0 и T_0 . При использовании уравнения состояния получим

$$T_1' = \frac{(p_0 - \Delta p)V_0}{p_0V_2},$$

или:

$$T_1' = \frac{7T_0}{5}.$$

После освобождения поршня аналогично первому случаю

$$\Delta V_2 = \frac{5\Delta p}{7p_0} = \frac{5p_0}{21}.$$

Уравнение состояния дает:

$$T_2' = \frac{8T_1'}{7},$$

откуда:

$$T'_2 = \frac{8T_0}{5}$$

Задача №11-3. Колебания заряда

Из теоремы Гаусса напряженность электрического поля заряженной цилиндрической поверхности определяется формулой

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r},$$

где r – расстояние от оси трубы. При натянутой прямой нити шарик находится на дуге окружности радиуса R с центром в точке крепления нити. Если нить составляет угол α с вертикалью, расстояние от конца нити до оси цилиндра $r = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$. Напряженность электрического поля в точке, где находится шарик, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Возможны два типа положений равновесия: либо нить вертикальна, либо нить наклонена под некоторым углом к вертикали. Рассмотрим возможные значения заряда в каждом из этих случаев. Поскольку в начальном состоянии нить не была натянута, шарик должен оказаться в устойчивом положении равновесия. Сколь угодно малые отклонения от неустойчивого положения равновесия приведут к тому, что шарик перейдет в другое положение равновесия.

Рассмотрим сначала случай, когда нить расположена вертикально, $\alpha = 0$. Тогда сила натяжения нити равна $T = qE - mg = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0} - mg$. Это положение равновесия возможно, если $T > 0$, то есть

$$\sigma q > 2\varepsilon_0 mg.$$

Исследуем его устойчивость. Пусть нить отклонится от вертикали на малый угол φ . Проекция силы на ось x , которая перпендикулярна текущему направлению нити, равна

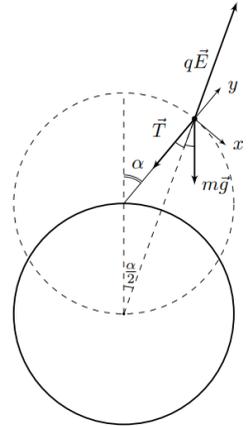
$$F_x = mg \sin \varphi - qE \sin \frac{\varphi}{2} \approx \left(mg - \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} \right) \varphi.$$

Положение равновесия будет устойчивым, если при отклонении нити на малый угол возникающая сила будет стремиться вернуть ее назад, то есть при $\varphi > 0$ должно быть $F_x < 0$, а значит условие устойчивости

$$\sigma q > 4\varepsilon_0 mg,$$

и при вертикальной нити возможны только такие значения заряда.

Рассмотрим теперь случай, когда нить отклонена на угол $0 < \alpha \leq 90^\circ$ от вертикали. Тогда электрическое поле в точке, где находится шарик, направлено под углом $\alpha/2$ к вертикали. Покажем действующие на шарик силы. При равновесии силы \vec{T} , $m\vec{g}$, и $q\vec{E}$ образуют треугольник. К тому же они параллельны сторонам треугольника образованного нитью, отрезком от точки на оси цилиндра до точки крепления нити и отрезка от точки на оси цилиндра до шарика. Поэтому эти три вектора сил образуют равнобедренный треугольник, подобный треугольнику со сторонами R , R , и r , откуда находим:



$$T = mg \quad \text{и} \quad \frac{qE}{r} = \frac{mg}{R}.$$

Отсюда:

$$q\sigma = 4\varepsilon_0 mg \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

В этом случае проекция силы на ось x :

$$F_x = mg \sin \alpha - qE \sin \frac{\alpha}{2} = mg \sin \alpha - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \tan \frac{\alpha}{2}.$$

В положении равновесия эта сила равна нулю, откуда можно получить прежнее выражение для σq . Вблизи положения равновесия, когда угол отклонения нити от вертикали равен $\alpha + \varphi$ ($\varphi \ll 1$), сила имеет вид

$$\begin{aligned} F_x &= - \left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) - mg \sin \alpha \right)' \varphi = \\ &= - \left(\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} - mg \cos \alpha \right) \varphi = -mg(1 - \cos \alpha)\varphi, \end{aligned}$$

поскольку $q\sigma = 4\varepsilon_0 mg \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Коэффициент перед угловым отклонением отрицателен, поэтому положение равновесия устойчиво.

Модуль заряда шарика уменьшается с возрастанием угла α . Максимальное значение угла α , соответствующее условию задачи: $\alpha_{max} = 90^\circ$, достигается при наименьшей величине модуля заряда шарика $|q_1| = \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$. В этом случае векторы сил образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Это значение заряда меньше значения, при котором вертикальное положение равновесия становится устойчивым. Поэтому минимальному значению заряда отвечает горизонтальное положение нити.

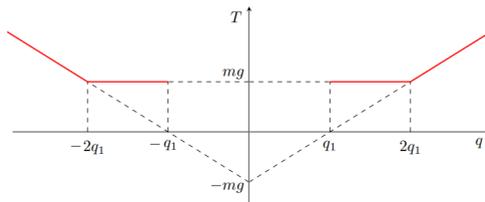
Таким образом, при $q_1 \leq |q| < 2q_1$ есть устойчивое положение равновесия с нитью, расположенной под некоторым углом к вертикали, а при $|q| \geq 2q_1$ устойчиво вертикальное положение нити. Окончательно ответ на первый вопрос:

$$|q| \geq \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}.$$

Будем плавно увеличивать модуль заряда от q_1 . При достаточно малых значениях заряда устойчивым будет наклонное положение нити, а угол α будет уменьшаться с увеличением заряда. При этом сила натяжения нити постоянна и равна mg . Когда модуль заряда достигнет значения $q_2 = 2q_1$, нить расположится вертикально. Если продолжить увеличивать модуль заряда от q_2 , то вертикальное положение нити будет сохраняться и сила натяжения нити будет линейно расти с зарядом:

$$T = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - mg.$$

Строим график, состоящий из горизонтального прямого отрезка и наклонного луча. Учитывая, что знак заряда может быть как положительным, так и отрицательным, часть графика, расположенная в первом квадранте соответствует случаю $\sigma > 0$, а расположенная во втором - $\sigma < 0$.



При $\frac{q\sigma}{\varepsilon_0 mg} \geq 4$ устойчиво положение равновесия $\alpha = 0^\circ$, а при $2 < \frac{q\sigma}{\varepsilon_0 mg} < 4$ устойчиво равновесие с $\alpha_2 = \arccos\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} - 1\right)$. Для случая $\alpha_1 = 0^\circ$ при отклонении шарика на малый угол φ от положения равновесия возникает возвращающая сила, проекция которой на ось x , перпендикулярную нити равна:

$$F_x = -\left(\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} - mg\right) \sin \varphi.$$

Проекция ускорения шарика $a_x = R\ddot{\varphi}$. С учетом малости φ получаем уравнение гармонических колебаний:

$$mR\ddot{\varphi} = -\left(\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} - mg\right) \varphi.$$

Циклическая частота в этом случае

$$\omega_1^2 = \frac{q\sigma}{4mR\varepsilon_0} - \frac{g}{R}.$$

Рассмотрим гармонические колебания для второго положения устойчивого равновесия. В этом случае возвращающая сила

$$F_x = -mg(1 - \cos \alpha)\varphi,$$

Подставляя $\cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$ в уравнение $ma_x = F_x$, получим:

$$mR\ddot{\varphi} = -2\left(mg - \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\right) \varphi.$$

Окончательно для циклической частоты:

$$\omega_2^2 = \frac{2g}{R} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mR}.$$

Ответ для периодов колебаний:

$$T = \begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{4mR\varepsilon_0}{q\sigma - 4mg\varepsilon_0}} & \text{при } |q| > \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2mR\varepsilon_0}{4mg\varepsilon_0 - q\sigma}} & \text{при } \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \leq |q| < \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \end{cases}$$

Альтернативное решение

Поскольку потенциал поля цилиндра $\varphi = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$ - потенциальная энергия заряда равна:

$$W_p = -\frac{q\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + mgR \cos \alpha = mgR \left(\cos \alpha - \frac{q\sigma}{mg\varepsilon_0} \ln\left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \right)$$

Положения равновесия определяются из условия $U' = 0$ (производная по углу здесь и далее обозначается штрихом), т.е

$$U' = mgR \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma q}{2mg\varepsilon_0} - 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \Rightarrow \alpha_1 = 0^\circ \quad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0} - 1\right)$$

Для второй производной имеем:

$$U'' = mgR \left(\frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0(1 + \cos \alpha)} - \cos \alpha \right)$$

Последняя доказывает, что положение равновесия 1 устойчиво ($U'' > 0$) при $q > \frac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}$, а положение равновесия 2 с ненулевым α существует при

$$\frac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma} \leq q < \frac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}.$$

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mR^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{U'' \varphi^2}{2} = E$$

откуда найдём:

$$\omega^2 = \frac{U''}{mR^2}$$

Тогда циклические частоты принимают следующие значения:

$$\omega_1^2 = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0 mR} - \frac{g}{R} \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \frac{2g}{R} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mR}$$

Случай $q = \frac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}$ является критическим. Для $\alpha \ll 1$ имеем:

$$W_p \approx mgR \left(1 - \ln(2) + \frac{\alpha^4}{16} + o(\alpha^6) \right)$$

В критическом случае равновесие является устойчивым, однако колебания являются ангармоническими!

$$T = \begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{4mR\varepsilon_0}{q\sigma - 4mg\varepsilon_0}} & \text{при } |q| > \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2mR\varepsilon_0}{4mg\varepsilon_0 - q\sigma}} & \text{при } \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \leq |q| < \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \\ \text{Ангармонические колебания} & \text{при } |q| = \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \end{cases}$$

Задача №11-4. Соленоид и виток

Первое решение

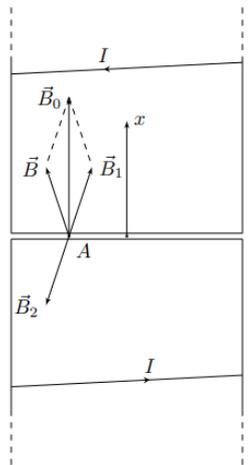
Добавим к исходному соленоиду такой же, дополнив его до бесконечного. Обозначим магнитные поля исходного и добавленного соленоидов за \vec{B} и \vec{B}_1 соответственно. Если направление силы тока в добавленном соленоиде изменить на противоположное, то и создаваемое им магнитное поле \vec{B}_2 изменится на противоположное, т.е. $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$. Добавленный соленоид с изменённым на противоположное направлением силы тока симметричен исходному относительно основания, поэтому создаваемые добавленным и исходным соленоидами магнитные поля \vec{B}_2 и \vec{B} соответственно будут также симметричны относительно основания.

Рассмотрим в точки, принадлежащие основанию. На рис.1 показаны исходный соленоид и добавленный с противоположным направлением тока. Поскольку внутри соленоида магнитное поле \vec{B}_0 однородно, имеем:

$$B_x + B_{1x} = B_0.$$

Также, поскольку магнитные поля \vec{B} и \vec{B}_2 симметричны относительно основания, имеем:

$$B_x + B_{2x} = 0.$$



Комбинируя полученные равенства, находим:

$$B_x = B_{1x} = \frac{B_0}{2}.$$

Таким образом, в исходной ситуации в точке A проекция магнитного поля на ось x равна:

$$B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2}.$$

Рассмотрим в плоскости основания точки, не принадлежащие ему. Поскольку магнитное поле вне бесконечного соленоида равно нулю:

$$\vec{B} + \vec{B}_1 = 0.$$

Тогда $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1 = \vec{B}$. Поскольку векторы \vec{B} и \vec{B}_2 симметричны относительно основания – в рассматриваемых точках магнитное поле направлено в плоскости основания, иначе $\vec{B}_2 \neq \vec{B}$ (см.рис.2.) Таким образом, в исходной ситуации в точке C проекция магнитного поля на ось x равна:

$$B_{Cx} = 0.$$

Второе решение

Второй вариант рассуждений может быть построен на использовании теоремы о телесном угле для магнитного поля. Если по плоскому слою течёт ток линейной плотностью \vec{i} , то в точке O компонента магнитного поля, направленная вдоль слоя перпендикулярно \vec{i} , равна:

$$B_{O\parallel} = \frac{\mu_0 i \Omega_O}{4\pi},$$

где Ω_O – телесный угол, под которым виден слой из точки O . Применяя теорему о телесном угле к осевой компоненте магнитного поля соленоида, получим:

$$B_x = \frac{\mu_0 n I \Omega_{\text{бок}}}{4\pi},$$

где $\Omega_{\text{бок}}$ – телесный угол, под которым видна боковая поверхность соленоида (с учётом знака, данная величина может быть и отрицательна). Отметим, что утверждения, данные в примечании к условию задачи, могут быть получены с помощью этой теоремы. В точках, принадлежащих основанию, боковая поверхность соленоида видна под телесным углом $\Omega_{\text{бок}} = 2\pi$, а в точках, лежащих в плоскости основания и не принадлежащих ему, боковая поверхность соленоида видна под нулевым телесным углом. Отсюда получим ответы:

$$B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad B_{Cx} = 0.$$

Поскольку виток сверхпроводящий, магнитный поток, пронизывающий его, должен оставаться постоянным и равным нулю. Пусть Φ_c – магнитный поток через виток от соленоида. Выберем положительное направление силы тока в витке такое, как и в соленоиде, тогда:

$$\Phi_c + LI_B = 0.$$

Как было показано в п.1, осевая компонента магнитного поля в плоскости витка на расстояниях меньших r постоянна и равна $\frac{B_0}{2}$, а на расстояниях больших r равна нулю. Поэтому поток магнитного поля соленоида через виток равен $\Phi_c = \frac{B_0 S}{2}$, где S – площадь основания соленоида. С учетом $S = \pi r^2$, находим:

$$\Phi_c = \frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2},$$

и получаем ответ на второй вопрос:

$$I_B = -\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2L}$$

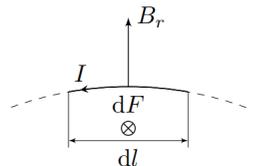
(ток в витке направлен против тока в обмотке соленоида).

Первое решение

Сила взаимодействия витка с соленоидом направлена вдоль их общей оси.

Пусть B_r – компонента магнитного поля витка, направленная перпендикулярно боковой поверхности соленоида. Рассмотрим элемент тока соленоида длины dl . Будем искать силу притяжения витка к соленоиду. Осевая компонента силы Ампера, действующей на него, равна:

$$dF_{1x} = -IB_r dl.$$



В толщине слоя dh находится $dN = ndh$ витков, а сила, действующая на них равна:

$$dF_x = dF_{1x}dN = -InB_r dldh.$$

Отметим, что $dldh = dS_{\text{бок}}$ – элемент площади боковой поверхности соленоида. Тогда выражение для элемента силы можно переписать в виде:

$$dF_x = -Ind\Phi_{\text{бок}},$$

где $\Phi_{\text{бок}}$ – поток магнитного поля витка через боковую поверхность соленоида. Равнодействующая сила равна:

$$F_x = -In\Phi_{\text{бок}}.$$

Для нахождения $\Phi_{\text{бок}}$ воспользуемся теоремой Гаусса для магнитного поля: через любую замкнутую поверхность поток магнитного поля равен нулю. Тогда имеем:

$$\Phi_{\text{бок}} + \Phi_{\text{осн}} = 0,$$

где $\Phi_{\text{осн}}$ – поток магнитного поля витка через основание соленоида. Поскольку $r \ll R$, магнитное поле витка в ближнем основании соленоида можно считать однородным и равным:

$$B_{\text{в.х}} = \frac{\mu_0 I_{\text{в}}}{2R}.$$

Также, поскольку соленоид полубесконечный, в дальнем основании соленоида магнитное поле витка равняется нулю. Тогда для $\Phi_{\text{осн}}$ имеем:

$$\Phi_{\text{осн}} = B_{\text{в.х}}S = \frac{\mu_0 I_{\text{в}}S}{2R},$$

откуда находим:

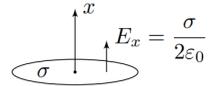
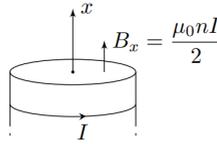
$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi\mu_0 n I r^2}{2} \right)^2$$

Соленоид и виток отталкиваются. *Примечание:* Отметим, что метод решения, использующий силу, действующую на виток с током в неоднородном магнитном поле, эквивалентен решению, описанному выше.

Второе решение

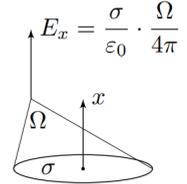
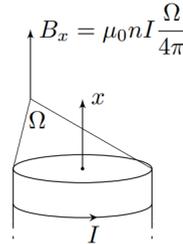
На больших ($R \gg r$) расстояниях от основания полубесконечного соленоида источник магнитного потока $\Phi_0 = B_0 S$ – ближний торец соленоида – выглядит практически точечным, и магнитный поток от него растекается практически равномерно по всем направлениям. Покажем это.

В соответствии с п.1 в основании соленоида проекция на ось x создаваемого им магнитного поля постоянна и равна $B_x = \frac{\mu_0 n I}{2}$. Изменение магнитного поля вне соленоида описывается теоремой Гаусса, а также теоремой о циркуляции для магнитного поля.



Поскольку токи вне соленоида отсутствуют, циркуляция магнитного поля по любому замкнутому контуру, не пересекающему поверхность соленоида, равна нулю. Теми же уравнениями описывается электрическое поле тонкого диска, заряженного по поверхности с плотностью заряда σ . Действительно, проекция на ось x электрического поля диска на его поверхности постоянна и равна $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Поскольку вне диска электрические заряды отсутствуют, поток электрического поля через любую поверхность, не пересекающую плоскость диска, равен нулю. Циркуляция электрического поля по любому замкнутому контуру также равна нулю.

В частности, убедимся в эквивалентности формул для B_x и E_x вне соленоида (рис.5.)

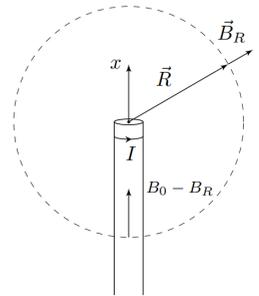


В соответствии с аналогией структур магнитного поля полубесконечного соленоида и электрического поля равномерно заряженного диска, на расстоянии $R \gg r$ от основания соленоида магнитное поле соленоида направленно вдоль линии, соединяющей рассматриваемую точку с основанием и равняется:

$$B_R = \frac{\mu_0 n I r^2}{4 R^2}.$$

Отметим, что изложенный вывод не противоречит теореме Гаусса для магнитного поля. Действительно, из теоремы о телесном угле для магнитного поля следует, что разность проекций магнитного поля внутри и вне соленоида на ось x равна B_0 . Применяя теорему Гаусса для сферической поверхности радиуса $R \gg r$ с центром в центре основания (см.рис.6), получим:

$$4\pi R^2 B_R = \Phi_0 = \pi r^2 B_0,$$



что совпадает с полученным из аналогии результатом.

Результирующая сила отталкивания, действующая на виток со стороны соленоида, равна:

$$F_{\text{в}x} = -2\pi R I_{\text{в}} B_R = \frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2,$$

откуда в соответствии с третьим законом Ньютона получим:

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2.$$

Третье решение

Задача также допускает энергетическое решение. Обозначим взаимную индуктивность соленоида и витка за $L_{\text{в}3} = \frac{\Phi_{\text{с}}}{I}$. В рассматриваемом положении она равна $\frac{\mu_0 n S}{2}$. Если обозначить индуктивность соленоида L_1 , то энергия системы равна

$$E = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L I_{\text{в}}^2}{2} + L_{\text{в}3} I I_{\text{в}},$$

или, с учетом соотношения $L_{\text{в}3} I + L I_{\text{в}} = 0$:

$$E = \frac{L_1 I^2}{2} - \frac{L_{\text{в}3}^2 I^2}{2L}.$$

Изменение энергии системы равняется:

$$dE = -\frac{I^2 L_{\text{в}3} dL_{\text{в}3}}{L}.$$

При движении соленоида в нём возникает ЭДС индукции. Поскольку сила тока в соленоиде остаётся постоянной, источник, подключенный к соленоиду, компенсирует ЭДС индукции, а значит совершает работу. Поток магнитного поля витка через соленоид равен

$$\Phi_2 = L_{\text{в}3} I_{\text{в}} = -\frac{L_{\text{в}3}^2 I}{L},$$

поэтому работа источника равна:

$$dA_{\text{ист}} = -\int_0^t \mathcal{E}_{\text{инд}} I dt = I d\Phi_2 = -\frac{2I^2 L_{\text{в}3} dL_{\text{в}3}}{L} = -2dE.$$

Пусть F_x – сила, действующая на соленоид со стороны витка. Тогда внешняя сила, действующая на соленоид для поддержания его в равновесии равна $-F_x$. При сдвиге соленоида на dx изменение энергии системы равно

$$dA_{\text{ист}} - F_x dx = dE,$$

откуда

$$F_x = \frac{dE}{dx} = -\frac{I^2 L_{\text{вз}}}{L} \frac{dL_{\text{вз}}}{dx}.$$

Найдём изменение взаимной индуктивности $dL_{\text{вз}}$ при сдвиге соленоида на расстояние dx вдоль оси симметрии. Сдвиг эквивалентен наращиванию еще $dN = ndx$ витков соленоида вблизи торца. Тогда сверхпроводящий виток начинает создавать дополнительный поток $d\Phi_1 = B_{\text{вз}} S dN$ через соленоид, а значит, изменение $L_{\text{вз}}$ составит

$$dL_{\text{вз}} = d\left(\frac{\Phi_1}{I_{\text{в}}}\right) = \frac{\mu_0 S n dx}{2R}.$$

В последнем выражении мы воспользовались магнитным полем витка в его центре. Подставляя $L_{\text{вз}}$ и $dL_{\text{вз}}$ в выражение для F_x , находим:

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2}\right)^2.$$

Четвёртое решение

Поиск работы источника можно обойти, замкнув подводящие к соленоиду провода накоротко. Тогда поток магнитного поля $\Phi = \left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L}\right) I$, пронизывающего соленоид, сохраняется при его перемещении. Для энергии магнитного поля получим:

$$E = \frac{\Phi^2}{2 \left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L}\right)}.$$

При перемещении соленоида изменение энергии системы равняется

$$dE = \frac{\Phi^2}{\left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L}\right)^2} \frac{L_{\text{вз}} dL_{\text{вз}}}{L} = \frac{I^2 L_{\text{вз}} dL_{\text{вз}}}{L}.$$

Тогда для силы, действующей на соленоид со стороны витка, получим:

$$F_x = -\frac{dE}{dx} = -\frac{I^2 L_{\text{вз}}}{L} \frac{dL_{\text{вз}}}{dx}.$$

Подставляя $L_{\text{вз}}$ и $dL_{\text{вз}}$ (см. третье решение) в выражение для F_x , находим:

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2.$$

Задача №11-5. Нелинейный элемент и конденсатор

Из второго закона Кирхгофа для цепи следует:

$$U_0 = IR + U_1 + \frac{A}{I},$$

откуда:

$$I^2 R - (U_0 - U_1)I + A = 0.$$

Для существования корней квадратного уравнения его дискриминант должен быть неотрицательным. Учитывая, что $I > 0$, получим:

$$U_0 \geq U_1 + 2\sqrt{AR}$$

Из второго закона Кирхгофа для цепи получим:

$$U_0 = IR + U_1 + \frac{A}{I} + U_C,$$

откуда:

$$U_C = U_0 - U_1 - IR + \frac{A}{I}.$$

Пусть $I_1 \approx 9,6$ мА – сила тока в цепи в точке 1. Тогда:

$$I_1^2 R - I_1(U_0 - U_1) + A = 0.$$

Пусть $U_{\text{max}} \approx 6$ В – максимальное напряжение на конденсаторе, а $I_2 \approx 2$ мА – соответствующая ему сила тока в цепи. Максимум напряжения на конденсаторе соответствует минимуму выражения $IR + \frac{A}{I}$, достигающемуся при равенстве слагаемых, т.е

$$I_2 = \sqrt{\frac{A}{R}}.$$

Для U_{max} находим:

$$U_{max} = U_0 - U_1 - 2\sqrt{AR}$$

Подставив $U_0 - U_1 = U_{max} + 2\sqrt{AR}$ в уравнение относительно I_1 , получим:

$$I_1^2 R - I_1 U_{max} - 2I_1 \sqrt{AR} + A = 0.$$

Выражая A из уравнения относительно I_2 :

$$(I_1 - I_2)^2 R = I_1 U_{max}$$

Получим ответы:

$$R = \frac{I_1 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 997 \text{ Ом} \quad A = \frac{I_1 I_2^2 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 3,99 \text{ мВт}$$

$$U_0 = U_1 + U_{max} + \frac{2I_1 I_2 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 11,99 \text{ В}$$

Перейдём к количеству теплоты, выделившемуся на резисторе. За малый промежуток времени Δt :

$$\Delta Q_R = I^2 R \Delta t = RI \Delta q_C = RC I \Delta U_C \Rightarrow Q_R = RCS$$

где S – площадь под графиком $I(U_C)$ в процессе зарядки конденсатора.

Первое решение

Найдём S непосредственным вычислением, проведя касательную к графику в точке 1, а затем из площади трапеции вычтем площадь области между касательной и графиком. Получим:

$$S \approx (37,1 - 38,3) \text{ мВт}$$

откуда:

$$Q_R = (370 - 383) \text{ мДж}$$

Второе решение

Данный результат может быть получен аналитически. Для этого заметим, что:

$$Q_R = RC \int_0^{U_{max}} I dU_C = RC \left(I_2 U_{max} + \int_{I_2}^{I_1} U_C dI \right)$$

Подставим зависимость $U_C(I)$ в подынтегральное выражение и получим:

$$Q_R = RC \left(I_2 U_{max} + \int_{I_2}^{I_1} \left(U_0 - U_1 - IR + \frac{A}{I} \right) dI \right)$$

Интегрируя, находим:

$$Q_R = RC \left(I_2 U_{max} + (U_0 - U_1)(I_1 - I_2) - \frac{R(I_1^2 - I_2^2)}{2} - A \ln \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right)$$

$$Q_R \approx (376 - 377) \text{ мДж}$$

Первое решение

Запишем закон сохранения энергии в системе:

$$A_{ист} = Q_R + Q_{H.Э} + W_C,$$

где Q_R и $Q_{H.Э}$ – количества теплоты, выделившиеся на резисторе и нелинейном элементе соответственно. Работа источника и энергия конденсатора равны соответственно:

$$A_{ист} = U_0 q_C = CU_0 U_{max} \quad W_C = \frac{CU_{max}^2}{2}$$

Рассмотрим малый промежуток времени dt . За это время на нелинейном элементе выделилось количество теплоты $dQ_{H.Э}$, равное:

$$dQ_{H.Э} = U_{H.Э} Idt = U_1 Idt + Adt = U_1 dq_C + Adt \Rightarrow Q_{H.Э} = CU_1 U_{max} + A\tau$$

Окончательно получим:

$$\tau = \frac{C}{A} \left((U_0 - U_1)U_{max} - RS - \frac{U_{max}^2}{2} \right) \approx 10,9 \pm 1,6 \text{ с}$$

Основная погрешность результата связана с определением S графическим способом.

Второе решение

Время τ можно также найти из дифференциального уравнения процесса зарядки конденсатора. Решая квадратное уравнение относительно I получим:

$$I = \frac{(U_0 - U_1 - U_C) \pm \sqrt{(U_0 - U_1 - U_C)^2 - 4AR}}{2R}$$

Графику зависимости $U_C(I)$ соответствует корень со знаком $+$. Введём переменную $V = U_0 - U_1 - U_C$. Тогда:

$$I = \frac{V + \sqrt{V^2 - 4AR}}{2R}$$

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора:

$$\frac{dq_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = -C \frac{dV}{dt} = I$$

откуда:

$$dt = -2RC \frac{dV}{V + \sqrt{V^2 - 4AR}}$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$dt = -\frac{C}{2A} \left(V - \sqrt{V^2 - 4AR} \right) dV$$

С учётом выражения для U_{max} , получим выражение для τ :

$$\tau = \frac{C}{2A} \int_{2\sqrt{AR}}^{U_0 - U_1} \left(V - \sqrt{V^2 - 4AR} \right) dV$$

Сразу вычислим первый интеграл:

$$\int_{2\sqrt{AR}}^{U_0 - U_1} V dV = \frac{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}{2}$$

Для вычисления второго интеграла введём переменную $x = \frac{V}{2\sqrt{AR}}$ и получим:

$$\int_{2\sqrt{AR}}^{U_0 - U_1} \sqrt{V^2 - 4AR} dV = 4AR \int_1^{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

Рассматриваемый интеграл является табличным и равен:

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2} + C$$

откуда:

$$4AR \int_1^{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}} \sqrt{x^2 - 1} dx =$$

$$= \frac{(U_0 - U_1)\sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR} - 4AR \ln\left(\frac{U_0 - U_1 + \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}}{2\sqrt{AR}}\right)}{2} \quad (1)$$

Для τ окончательно имеем:

$$\tau = \frac{C}{4A} \left[(U_0 - U_1)^2 - 4AR - (U_0 - U_1)\sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR} + \right.$$

$$\left. + 4AR \ln\left(\frac{U_0 - U_1 + \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}}{2\sqrt{AR}}\right) \right] \approx 10,9 \text{ с} \quad (2)$$