

Задание 10.1. Газировка.

Часть 1. (8 баллов). С помощью выданного вам оборудования определите давление воды внутри бутылки газировки. Считайте, что внутри бутылки находится углекислый газ в газообразном состоянии и вода с растворённым в ней углекислым газом. Согласно закону Генри количество газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорционально давлению этого газа $\nu = \alpha VP$, где V – объём жидкости, P – давление газа, $\alpha = 3,5 \cdot 10^{-4}$ моль/(Па·м³) для углекислого газа, растворяемого в воде.

Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па, комнатную температуру считайте равной $T = 300$ К, молярная масса углекислого газа $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль.

В первой части работы оценивать погрешность не нужно.

Часть 2. (7 баллов). С помощью выданного Вам оборудования проверьте справедливость закона Генри, получив три точки для зависимости количества растворённого газа от давления: одну - при атмосферном давлении, вторую - при давлении больше атмосферного и третью - при давлении меньше атмосферного. Подробно опишите Ваши действия и вычислите значение коэффициента α , сравнив его с данным в условии.

Оборудование: две бутылки с газированной водой, стаканчик, шприц объёмом 20 мл, затычка для шприца, салфетки для поддержания чистоты рабочего места.

Примечания:

- 1) Рекомендуем одну бутылку использовать для пробных экспериментов, а вторую для итогового. Не рекомендуем трясти бутылку перед тем, как её открывать.
- 2) Если вода находится в спокойном состоянии, то концентрация растворённого в ней газа приходит в равновесное состояние за относительно длительное время, но если воду перемешивать или взбалтывать, то равновесное состояние устанавливается гораздо быстрее.

Возможное решение

Часть 1. Откроем бутылку и аккуратно наберём из неё некоторое количество газировки в пустой шприц (около 5 мл). Сразу же заткнём кончик шприца затычкой. Поскольку бутылка была только что открыта, концентрация растворённого в ней углекислого газа соответствует давлению внутри бутылки (так как концентрация изменяется медленно).

Теперь будем трясти шприц, помогая растворённому газу перейти в газообразное состояние, при этом поршень шприца должен иметь возможность свободно перемещаться, обеспечивая равенство давления внутри шприца атмосферному.

Спустя некоторое время (около 1 минуты) концентрация растворённого углекислого газа придёт в соответствие атмосферному давлению, а его газообразные излишки соберутся над водой.

Для воды в бутылке: $\nu_0 = \alpha V_B P_{\text{бут}}$, где V_B – объём воды, набранной в шприц, $P_{\text{бут}}$ – давление газа в бутылке, ν_0 – количества газа, растворённого в воде внутри бутылки.

Для воды в шприце после достижения равновесия: $\nu_0 - \nu_r = \alpha V_B P_0$, где ν_r – количество нерастворённого углекислого газа в шприце.

Запишем уравнение состояния идеального газа: $P_0 V_r = \nu_r RT$, где V_r – объём нерастворённого газа в шприце.

Из записанных выше уравнений получим: $\alpha V_B P_{\text{бут}} - \frac{P_0 V_r}{RT} = \alpha V_B P_0$, откуда

$$P_{\text{бут}} = P_0 \left(1 + \frac{V_r}{\alpha V_B RT} \right).$$

Измерения:

$$V_B = 7,5 \text{ мл}, V_r = 7 \text{ мл}$$
$$P_{\text{бут}} = P_0 \left(1 + \frac{V_r}{\alpha V_B RT} \right) = 10^5 \left(1 + \frac{7}{3,5 \cdot 10^{-4} \cdot 7,5 \cdot 8,31 \cdot 300} \right) = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Часть 2. Для получения дополнительных точек зависимости количества растворённого газа от давления будем внутри шприца создавать другие давления. (Содержимое шприца осталось от первого эксперимента). Придерживая наконечник шприца, надавим на поршень с заметным усилием, и будем потряхивать шприц около 1 минуты (этого времени достаточно для установления равновесия с учетом точности эксперимента), добиваясь равновесной концентрации растворённого газа. Затем определим объём, занимаемый газом, продолжая также давить на поршень. Обозначим его V_r' . Теперь аккуратно отпустим поршень и измерим объём газа под поршнем сразу же после этого; обозначим его V_r .

Так как между замера V_r' и V_r прошло мало времени, то концентрация растворённого в воде газа не успела измениться. Давление газа под сжатым поршнем можем получить из уравнения состояния идеального газа. $P = P_0 \frac{V_r}{V_r'}$.

Количество газа в газообразной фазе согласно закону Бойля-Мариотта $\frac{PV_r}{RT}$, а в растворённом виде согласно закону Генри αPV_B . Общее количество газа в шприце неизменно, обозначим его ν .

$$\nu = \frac{PV_r'}{RT} + \alpha PV_B$$

LIV Всероссийская олимпиада школьников по физике
Региональный этап. Экспериментальный тур. 25 января 2020 г.

Подставив давление, получим:

$$v = \frac{P_0 V_r}{RT} + \alpha \frac{P_0 V_r}{V'_r} V_B$$

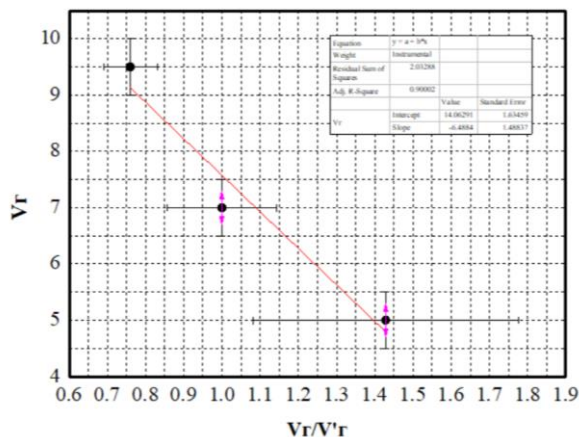
После небольших преобразований:

$$const = V_r + \alpha V_B RT \frac{V_r}{V'_r}$$

Проведём аналогичный опыт, только теперь будем вытягивать поршень шприца, создавая под ним давление меньше атмосферного.

Построим график зависимости V_r от $\frac{V_r}{V'_r}$ для трёх точек.

V'_r , мл	V_r , мл	$\frac{V_r}{V'_r}$	ΔV_r , мл	$\Delta \frac{V_r}{V'_r}$
7	7	1.00	0,5	0.14
12.5	9.5	0.76	0,5	0.07
3.5	5	1.43	0,5	0.35



Убедимся, что три точки лежат на прямой и определим угловой коэффициент этой прямой

$$k = -6,48 \text{ мл}$$

Из полученной теоретической зависимости

$$\alpha = -\frac{k}{V_B RT} = \frac{6,48}{7,5 \cdot 8,31 \cdot 300} = 3,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{моль}}{\text{Па} \cdot \text{м}^3}$$

Оценим погрешность.

$$\Delta \frac{V_r}{V'_r} = \frac{V_r}{V'_r} \left(\frac{\Delta V_r}{V_r} + \frac{\Delta V'_r}{V'_r} \right)$$

Погрешность коэффициента k определим из графика по разнице между минимальным и максимальным угловыми коэффициентами.

$$\Delta k = \frac{13,5 - 5,6}{2} = 3,5 \text{ мл}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta V_B}{V_B} = 60\%$$

Учитывая погрешность определения α , можно утверждать, что теоретическое значение соответствует экспериментальному.

Задание 10.2. Сосчитай шарики.

В прямоугольной запечатанной непрозрачной коробочке находится некоторое количество шариков. Определите их количество.

Толщиной стенок непрозрачной коробочки и её массой можно пренебречь. Считайте, что все шарики одинаковые как внутри прозрачной, так и внутри непрозрачной коробочек. Прозрачная коробочка выдана вам для качественного понимания процессов, происходящих внутри непрозрачной коробочки, её нельзя использовать в качестве оборудования, но вы можете ссылаться на качественные результаты экспериментов с прозрачной коробочкой. Также вы можете извлекать из прозрачной коробочки шарики и проводить с ними необходимые опыты.

ВАЖНО!!! Вскрывать непрозрачную коробочку и получать доступ к её содержимому запрещается! Также предложенный вами метод должен работать и для коробочек с жёсткими стенками, иначе он будет оценён в 0 баллов.

При написании отчёта уделите особое внимание описанию ваших действий, особенно тех, которые направлены на увеличение точности измерений и пояснениям как именно эти действия позволяют увеличить точность измерений.

Примечание. Объём шара равен $V_{\text{ш}} = \pi D^3 / 6$, где D – диаметр шара.

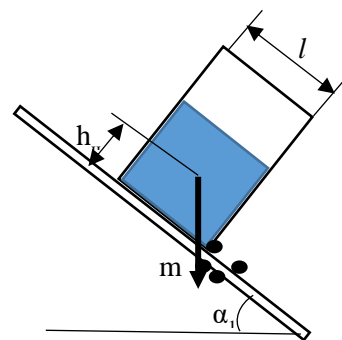
Оборудование: непрозрачная коробочка, две линейки, канцелярская скрепка, прозрачная коробочка, лист миллиметровки формата А5.

Возможное решение.

1. Проведём опыты с прозрачной коробочкой. Так как находящееся внутри неё пшено является сыпучим веществом, то можем заметить, что при наклоне коробочки до некоторого угла пшено сохраняет занимаемую им форму, а после превышения предельного угла пшено лавинообразно пересыпается. Заметим, что, если коробочку установить под некоторым углом и интенсивно постучать по боковым стенкам, создав вибрацию, то поверхность пшена оказывается параллельна горизонту.

Также заметим, что если стучать по коробочке вертикально, то поверхность пшена не всегда оказывается параллельна горизонту.

2. Расположим непрозрачную коробочку вертикально и постучим по её боковым стенкам, тогда пшено расположится так, что примет форму параллелепипеда. Установим коробочку на линейку и начнём плавно увеличивать угол наклона линейки к горизонту. Нам нужен угол, при котором коробочка начнёт переворачиваться. Мы сталкиваемся с проблемой, что коробочка начинает соскальзывать с линейки раньше, чем переворачивается, так как трения о линейку недостаточно. Для решения проблемы прицепим к линейке скрепку так, чтобы она образовала небольшой упор (на рисунке скрепка схематично обозначена четырьмя чёрными кружочками). Так как скрепка тонкая, то созданный ею упор не повлияет на моменты сил, но позволит коробочке не соскальзывать.



3. Повторим опыт с наклоном плоскости и убедимся, что коробочка начинает переворачиваться до того, как пшено внутри неё начинает пересыпаться. Это можно понять двумя способами:

- 1) по звуку (когда пшено пересыпается, это слышно);
- 2) использовать прозрачную коробочку и наклонить её на такой же угол.

Для угла, при котором начинается переворот коробочки, из уравнения моментов сил относительно правого нижнего угла коробочки получим:

$$h_{\text{цм}} = \frac{l}{2} \cdot \text{ctg}\alpha_1.$$

Тогда уровень пшена в коробочке составляет

$$h = 2h_{\text{цм}} = l \cdot \text{ctg}\alpha_1.$$

Измерим ширину l и глубину b коробочки.

$$l = 47 \text{ мм}, b = 39 \text{ мм}.$$

Угол α_1 определим через высоту конца линейки над столом H и длину линейки L .

Для повышения точности проведём опыты несколько раз. Очень важно увеличивать угол наклона плавно и медленно, не создавая вибрации и толчков, из-за которых коробка может начать раньше опрокидываться.

$$L = 31 \text{ см}.$$

№	H , см	$\sin\alpha_1$	$\text{ctg}\alpha_1$
1	13,1	0,423	2,14
2	13,2	0,425	2,12
3	12,9	0,416	2,19

$$\text{ctg}\alpha_{1\text{cp}} = 2,15$$

$$h = l \cdot \text{ctg}\alpha_{1\text{cp}} = 10,1 \text{ см}$$

4. Теперь мы знаем объём, занимаемый пшеном в коробке:

$$V = lbh = 4,7 \cdot 3,9 \cdot 10,1 = 185 \text{ см}^3.$$

5. Для того, чтобы узнать сколько шариков входит в этот объём, есть два варианта:

- 1) измерить объём, занимаемый пшеном в прозрачной коробочке, и посчитать количество шариков (крупинок) в ней;
- 2) определить диаметр шарика и рассчитать плотность упаковки.

6. Выберем второй путь. Для измерения диаметра шарика выложим 50 шариков в ряд и измерим длину ряда. Для формирования ряда можно согнуть миллиметровку и затем насыпать шарики в место сгиба.

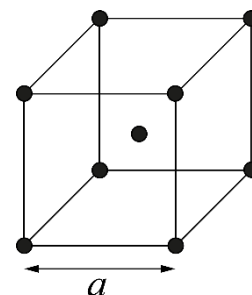
Длина ряда $L_p = 10,9$ см, количество шариков $N = 50$ шт, тогда диаметр шарика:

$$D = \frac{L_p}{N} = 2,18 \text{ мм}.$$

Объём одного шарика $V_{ш} = V_{ш} = \frac{\pi}{6} D^3 = 5,4 \text{ мм}^3$.

7. Можно рассмотреть разные варианты плотной упаковки.

1) Объёмно-центрированная кубическая решётка: элементарной ячейкой является куб, в каждой из вершин которого находится центр зерна, и ещё у одного центр совпадает с центром куба. Найдём плотность упаковки такой решётки: $k = \frac{V_0}{V_{я}}$, где $V_0 = NV_3$ – объём, занимаемый зёрнами, N – число зёрен, приходящихся на одну ячейку, $V_{я} = a^3$ – объём ячейки. Ребро куба a можно связать с диаметром зерна: $a\sqrt{3} = 2D$ (на большой диагонали куба укладывается два диаметра зерна). N подсчитаем таким образом: каждое из 8 зёрен, центры которых находятся в вершинах куба, принадлежит 8 соседним ячейкам, поэтому на каждую ячейку приходится по $1/8$ зерна, и ещё одно зерно находится в центре куба: $N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$.

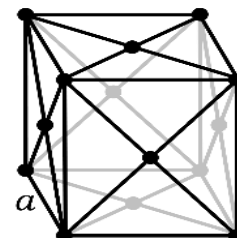


После подстановки $k = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0,68$.

2) Гранецентрированная решётка. Атомы находятся в вершинах куба и на серединах всех граней. В этом случае:

$$a\sqrt{2} = 2D, N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4, k = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74.$$

3) Стандартная кубическая решётка. $a = D, N = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1, k = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$.



При решении задачи можно было взять любой из вариантов. Опыт, проведённый с заполнением пустот между зёрнами водой, показывает, что в реальности $k = 0,62$.

8. Примем $k = 0,6$. Объём занимаемый одним зёрнышком, равен $V_{ш}' = \frac{V_{ш}}{k} = 9,0 \text{ мм}^3$.

9. Тогда количество шариков равно $N_{ш} = \frac{V}{V_{ш}'} = 2 \cdot 10^4$.

10. Оценим погрешность: $\Delta \text{ctg} \alpha_{1 \text{cp}} = \frac{\sum |\text{ctg} \alpha_i - \text{ctg} \alpha_{\text{cp}}|}{3} = 0,03$; $\Delta D = \frac{2 \text{ мм}}{N} = 0,04 \text{ мм}$; $\Delta k = 0,1$

$$\varepsilon N_{ш} = 3 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} = 0,26; \quad \Delta N_{ш} = N_{ш} \cdot \varepsilon N_{ш} = 0,5 \cdot 10^4.$$

Окончательно:
$$N_{ш} = (2,0 \pm 0,5) \cdot 10^4$$