Материалы для проведения регионального этапа

XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2019–2020 учебный год

Второй день

3–4 февраля 2020 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, П. Ю. Козлов, П. А. Кожевников, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, В. С. Кулишов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, О. С. Смирнов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, Е. О. Холмогоров, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **3 февраля 2020 г.** (I тур) и **4 февраля 2020 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2019–2020 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 3 февраля 2020 г., по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним. (*И. Рубанов*)

Решение. Пусть Миша, пробежав полкруга, развернётся и побежит назад. Пока он пробежит полкруга обратно, он встретит Петю. Когда Миша добежит до точки старта, Петя ещё не добежит до неё. Значит, если Миша продолжит бежать в том же направлении, он встретит Петю в какой-то точке на расстоянии d от старта. Пусть он пробежит ещё положительное расстояние ε, меньше $0{,}01d$, а затем развернётся (он может это сделать). Тогда, пока Петя преодолевает оставшееся расстояние d, Вася пробежит $1{,}02d > \varepsilon + (d + \varepsilon)$. Значит, он уже минует точку старта, а значит, перед этим он поравняется с Петей в третий раз.

Комментарий. Любое верное описание действий Миши (возможно, включающее слова типа «достаточно малое расстояние» и т. п.) — 7 баллов.

9.7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, …, 2019 (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально? (*Р. Женодаров, О. Дмитриев*)

Ответ. 1010.

Решение. Рассмотрим двух хамелеонов, говоривших подряд. Один из них в момент высказывания был коричневым;

действительно, если бы они оба были зелёными, то после высказывания первого количество зелёных хамелеонов не изменилось бы, и второй назвал бы то же число, что и первый. Разобьём всех хамелеонов на 1009 пар, говоривших подряд, и ещё одного хамелеона; поскольку в каждой паре был коричневый, исходное количество зелёных хамелеонов было не больше $2019 - 1009 = 1010$.

Осталось показать, что 1010 зелёных хамелеонов быть могло. Пронумеруем хамелеонов в порядке их высказываний. Пусть все нечётные хамелеоны — зелёные, а все чётные — коричневые. Тогда первый скажет 1010, второй — 1 и станет зелёным. Тогда третий скажет 1011, а четвёртый — 2 и станет зелёным, и так далее. В результате нечётные хамелеоны произнесут все числа от 1010 до 2019, а чётные — все числа от 1 до 1009.

Замечание. Из первого абзаца решения можно вывести, что в любом оптимальном примере коричневыми должны являться в точности хамелеоны с чётными номерами.

Комментарий. Только доказательство, что зелёных хамелеонов было не больше 1010 — 4 балла.

Только пример, показывающий, что изначально могло быть ровно 1010 зелёных хамелеонов — 3 балла.

9.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность, описанная около треугольника ABL, пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что точка S, симметричная точке C относительно прямой DL, лежит на стороне AB и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать $\angle ABC$? (*Б. Обухов, жюри*)

Ответ. 60°.

Первое решение. Из симметрии треугольники CLD и SLD равны, поэтому $DS = DC$, $\angle CDL = \angle SDL$ и $\angle DLC = \angle DLS$. Поскольку четырёхугольник $ALDB$ вписан в окружность, имеем $\angle BAL = \angle LDC$ (см. рис. 1). На хорды AL и DL этой окружности опираются равные углы, поэтому $AL = DL$.

Отложим на луче AB отрезок $AS' = DS = DC$. Тогда треугольники $S'LA$ и SLD равны по двум сторонам ($AS' = DS$, $AL = DL$) и углу между ними. Значит, $LS' = LS$ и $\angle AS'L = \angle DSL$. Если точки S' и S не совпадают, то в равнобедренном треугольнике LSS' углы при основании SS' равны, поэтому $\angle AS'L = \angle BSL$. Значит, $\angle DSL = \angle BSL$, то есть D лежит на AB; это невозможно.

Итак, $S' = S$, и $\angle ALS = \angle DLS = \angle DLC$. Сумма этих трёх углов равна 180°, поэтому они равны по 60°. Отсюда $\angle ABC = 180^\circ - \angle ALD = 60^\circ$.

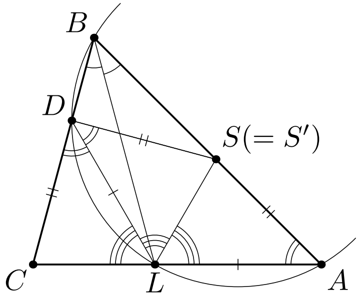

Рис. 1

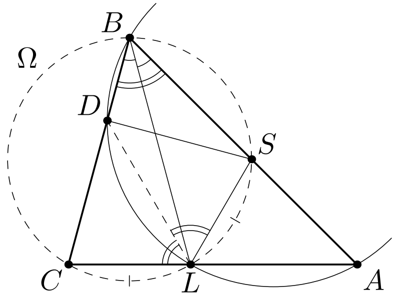

Рис. 2

Второе решение. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника BCS (см. рис. 2). В этом треугольнике прямая BL является биссектрисой угла B, а прямая LD — серединным перпендикуляром к стороне CS. Эти прямые различны; обе они проходят через середину дуги CS окружности Ω, не содержащей B. Значит, их точка пересечения L и есть эта середина дуги, то есть $L \in \Omega$.

Поскольку четырёхугольник $ALDB$ вписан, имеем $\angle ABC = \angle DLC = \beta$. Из симметрии, $\angle DLC = \angle DLS = \beta$. Теперь из окружности Ω получаем $180^\circ = \angle CBS + \angle SLC = \beta + \angle DLS + \angle DLC = 3\beta$, откуда $\beta = 60^\circ$.

Замечание. Существуют и другие решения. Можно, например, заметить, что точка L является центром вневписанной окружности треугольника BDS (поскольку BL — биссектриса внутреннего угла этого треугольника, а DL — биссектриса его внешнего угла). Это приводит к вычислению $\angle ABC = \angle DLC = \angle DLS = 90^\circ - \angle ABC/2$, откуда следует ответ.

Можно также рассмотреть точку T, симметричную точке C относительно LB, а также проекции S' и T' точки C на LD и LB соответственно. Из вписанности четырёхугольников $ABDL$ и $LT'S'C$ имеем $\angle ABC = \angle DLC = \angle S'T'C =$

$= \angle STC = \angle BTC$. Но треугольник BTC — равнобедренный, поэтому $\angle BTC = 90^\circ - \angle ABC/2$.

Комментарий. Без дополнительных соображений утверждается, что треугольники ALS и DLS равны (по двум сторонам и углу $\angle LAS = \angle LDS$ **не** между ними) — не более 3 баллов за задачу.

9.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший? (*И. Богданов*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Докажем следующую несложную лемму.

Лемма. *Если n-угольник разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники, количество которых равно t, то $n = td + 2$.*

Доказательство. Индукция по t; база при $t = 1$ очевидна.

Сделаем шаг индукции. Предполагая, что утверждение верно для количеств $(d+2)$-угольников, равных $1, 2, \ldots, t-1$, рассмотрим разрезание n-угольника P на t таких многоугольников. Возьмём в разрезании любую диагональ. Она делит наш n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2, один из которых разрезан на s, а другой — на r многоугольников, где $s + r = t$, причём $s < t$, $r < t$. По предположению индукции в многоугольниках P_1 и P_2 соответственно $sd + 2$ и $rd + 2$ сторон, а значит (поскольку P_1 и P_2 склеены по стороне), в многоугольнике P всего $(sd + 2) + (rd + 2) - 2 = (s + r)d + 2 = td + 2$ сторон. $\square$

Перейдём к задаче. Предположим противное: пусть некоторый правильный многоугольник Q разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники ($d \geqslant 3$ — нечётно), среди которых есть хороший $(d + 2)$-угольник $A_0A_1 \ldots A_{d+1}$ — пусть, скажем, сторона $A_{d+1}A_0$ параллельна некоторой другой стороне A_kA_{k+1}, где $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Опишем вокруг Q окружность. В силу параллельности $A_{d+1}A_0 \parallel A_kA_{k+1}$, меньшие дуги A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ равны.

Пусть на меньшей дуге A_0A_1 расположены (в порядке следования от A_0 к A_1) m вершин многоугольника Q, назовем их $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Возможно, что $m = 0$. Если $m > 0$, вырежем из многоугольника Q многоугольник $A_0B_1B_2\ldots B_mA_1$. Видим, что этот $(m+2)$-угольник оказывается разбитым непересекающимися диагоналями на $(d+2)$-угольники. Согласно лемме, m делится на d (это верно и при $m = 0$).

Аналогично доказываем, что внутри каждой из дуг (не считая концов дуг) A_1A_2, …, $A_{k-1}A_k$ количество вершин многоугольника Q кратно d. Тогда количество вершин многоугольника Q внутри (меньшей) дуги A_0A_k (не считая самих концов дуг A_0 и A_k) равно $td+k-1$ для некоторого целого t. Аналогичный подсчёт количества вершин многоугольника Q, лежащих внутри (меньшей) дуги $A_{k+1}A_{d+1}$, даёт $sd+d-k-1$. Приравнивая, получаем $td+k-1 = sd+d-k-1$, откуда $2k$ делится на d. В силу нечётности d получаем, что k делится на d; это противоречит условию $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Замечание. В приведённом решении противоречие получается из подсчёта числа вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ и приравнивании этих количеств.

У этого рассуждения есть вариации; например, можно осуществить двойной подсчёт суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$.

Комментарий. Только сформулирована и доказана лемма или эквивалентное утверждение — 0 баллов.

Имеется продвижение в виде идеи приравнять количества вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ или приравнять суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ — 1 балл.

Во в целом верном решении отсутствует или неверно доказательство леммы из решения выше (но формулировка её присутствует) — снимается 1 балл.

9.10. Докажите, что для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_9$ верно неравенство

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2} + \ldots +$$

$$+\frac{x_8-x_1}{x_8x_1+2x_9x_1+x_9^2}+\frac{x_9-x_2}{x_9x_2+2x_1x_2+x_1^2}\geqslant 0.$$

(*П. Бибиков*)

Решение. Продолжим нумерацию циклически: будем считать, что $x_{i+9}=x_i$.

Зафиксируем индекс i и обозначим для простоты $a=x_i$, $b=x_{i+1}$, $c=x_{i+2}$. Заметим, что при $a\geqslant c$ выполнено неравенство

$$ac+2bc+b^2\leqslant ac+ab+bc+b^2=(a+b)(b+c),$$

а при $a\leqslant c$ — неравенство

$$ac+2bc+b^2\geqslant ac+ab+bc+b^2=(a+b)(b+c).$$

Значит, в любом случае имеем

$$\frac{a-c}{ac+2bc+b^2}\geqslant\frac{a-c}{(a+b)(b+c)}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b},$$

то есть

$$\frac{x_i-x_{i+2}}{x_ix_{i+2}+2x_{i+1}x_{i+2}+x_{i+1}^2}\geqslant\frac{1}{x_{i+1}+x_{i+2}}-\frac{1}{x_i+x_{i+1}}.$$

Складывая такие неравенства при всех $i=1,2,\ldots,9$, получаем требуемое.