

Материалы для проведения
регионального этапа
**XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ**

2019–2020 учебный год

Второй день

3–4 февраля 2020 г.

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, П. Ю. Козлов, П. А. Кожевников, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, В. С. Кулишов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, О. С. Смирнов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, Е. О. Холмогоров, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



ВВЕДЕНИЕ

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **3 февраля 2020 г.** (I тур) и **4 февраля 2020 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временными регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2019–2020 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 3 февраля 2020 г., по адресу region.math@yandex.ru.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В ком-

ментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

◆

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

- 10.6. На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0? (Н. Агаханов)

Ответ. Да, можно.

Решение. Первым действием дописываем $\cos^2 x$, вторым — $\cos^2 x + \cos x$. Поскольку $\cos \pi = -1$, значение последнего выражения при $x = \pi$ равно 0.

Комментарий. Ответ без предъявления искомого выражения — 0 баллов.

Только предъявление любого верного искомого выражения без указания последовательности шагов, которая к нему приводит — 6 баллов.

- 10.7. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены прямоугольники. Оказалось, что все вершины этих прямоугольников, отличные от точек A, B, C, D , лежат на одной окружности. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. (А. Кузнецов)

Решение. Пусть $ABXY$ — один из данных прямоугольников, а O — центр окружности, на которой лежат восемь вершин из условия задачи (см. рис. 3). Тогда O лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку XY . Но ℓ совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB . Поскольку O лежит на ℓ , имеем $OA = OB$.

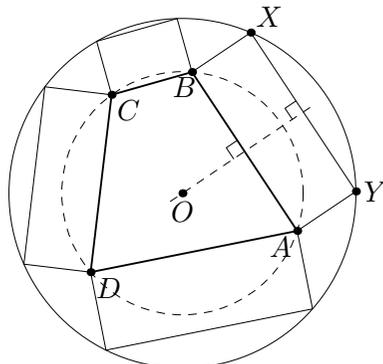


Рис. 3

Аналогично доказываем, что $OB = OC$ и $OC = OD$. Тогда O равноудалена от всех вершин четырёхугольника $ABCD$, зна-

чит, $ABCD$ вписан в окружность с центром O , что и требовалось доказать.

Комментарий. Утверждается, но не доказано, что искомая и данная окружности концентрические — 1 балл.

- 10.8. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $*x^2 + *x + *$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня? (О. Южаков)

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Решение будет состоять из трёх шагов (А, В, С).

А) Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть при некоторых натуральных a, b, c квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Тогда b и c делятся на a .

Доказательство. По теореме Виета $b/a = -(x_1 + x_2)$ и $c/a = x_1x_2$ являются целыми числами. Лемма доказана.

В) Предположим, что натуральные числа $k + 1, k + 2, \dots, k + 3n$ (при некотором целом неотрицательном k) нужным образом расставлены в качестве коэффициентов данных квадратных трёхчленов $a_ix^2 + b_ix + c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для определённости пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Тогда $a_1 \geq k + 1$, откуда $a_2 \geq k + 2$, и т.д., $a_n \geq k + n$. Тогда из леммы следует, что минимальное из чисел b_n, c_n не меньше, чем $2a_n$, а максимальное (назовём его M) — не меньше, чем $3a_n$. Но M должно быть среди чисел $k + 1, k + 2, \dots, k + 3n$. Получаем $3(k + n) \leq 3a_n \leq M \leq k + 3n$. Отсюда $k \leq 0$, и, значит, $k = 0$. Кроме того, $a_n = n$, откуда сразу следует, что $a_i = i$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

С) Среди $3n$ подряд идущих чисел менее $3n/2 + 1$ чётных. С другой стороны, зная, что a_i пробегает числа $\{1, 2, \dots, n\}$, получим оценку снизу на количество C чётных чисел среди всех коэффициентов. Заметим, что в каждой из n троек (a_i, b_i, c_i) хотя бы одно чётное число, иначе значение трёхчлена $a_ix^2 + b_ix + c_i$ в любой целой точке будет нечётно, в частности, такой трёхчлен не может иметь целых корней. Если же a_i чётно (число соответствующих троек (a_i, b_i, c_i) равно $\lfloor n/2 \rfloor$), то b_i и c_i , в силу

леммы, тоже чётные, значит, в такой тройке (a_i, b_i, c_i) все три коэффициента чётные. Итого $C \geq n + 2\lfloor n/2 \rfloor \geq 2n - 1$. Сравнивая верхнюю и нижнюю оценки, имеем $3n/2 + 1 > C \geq 2n - 1$, откуда $n < 4$. Противоречие.

Комментарий. Только часть А (сформулирована и доказана лемма о делимости коэффициентов) — 1 балл.

Сделаны части А и В (т.е. в предположении, что ответ «можно», доказано, что каждый старший коэффициент не превышает n) — 4 балла.

Из оставшихся 3 баллов начисляются продвижения в части С (получение противоречия в случае, когда старшие коэффициенты равны $1, 2, \dots, n$). Если часть С доказана с ссылкой на недоказанный факт о наличии простых чисел среди чисел от $n + 1$ до $3n$, из возможных 3 баллов начисляется 1 балл.

Если в решении лемма используется без доказательства — снимается 1 балл.

- 10.9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непересекающимися (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший? (И. Богданов)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Докажем следующую несложную лемму.

Лемма. Если n -угольник разбит непересекающимися диагоналями на $(d+2)$ -угольники, количество которых равно t , то $n = td + 2$.

Доказательство. Индукция по t ; база при $t = 1$ очевидна.

Сделаем шаг индукции. Предполагая, что утверждение верно для количеств $(d+2)$ -угольников, равных $1, 2, \dots, t-1$, рассмотрим разрезание n -угольника P на t таких многоугольников. Возьмём в разрезании любую диагональ. Она делит наш n -угольник на два многоугольника P_1 и P_2 , один из которых разрезан на s , а другой — на r многоугольников, где $s + r = t$, причём $s < t, r < t$. По предположению индукции в многоугольниках P_1 и P_2 соответственно $sd + 2$ и $rd + 2$ сторон, а значит

(поскольку P_1 и P_2 склеены по стороне), в многоугольнике P всего $(sd + 2) + (rd + 2) - 2 = (s + r)d + 2 = td + 2$ сторон. \square

Перейдём к задаче. Предположим противное: пусть некоторый правильный многоугольник Q разбит непересекающимися диагоналями на $(d + 2)$ -угольники ($d \geq 3$ — нечётно), среди которых есть хороший $(d + 2)$ -угольник $A_0A_1 \dots A_{d+1}$ — пусть, скажем, сторона $A_{d+1}A_0$ параллельна некоторой другой стороне A_kA_{k+1} , где $k \in \{1, 2, \dots, d - 1\}$.

Опишем вокруг Q окружность. В силу параллельности $A_{d+1}A_0 \parallel A_kA_{k+1}$, меньшие дуги A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ равны.

Пусть на меньшей дуге A_0A_1 расположены (в порядке следования от A_0 к A_1) m вершин многоугольника Q , назовем их B_1, B_2, \dots, B_m . Возможно, что $m = 0$. Если $m > 0$, вырежем из многоугольника Q многоугольник $A_0B_1B_2 \dots B_mA_1$. Видим, что этот $(m + 2)$ -угольник оказывается разбитым непересекающимися диагоналями на $(d + 2)$ -угольники. Согласно лемме, m делится на d (это верно и при $m = 0$).

Аналогично доказываем, что внутри каждой из дуг (не считая концов дуг) $A_1A_2, \dots, A_{k-1}A_k$ количество вершин многоугольника Q кратно d . Тогда количество вершин многоугольника Q внутри (меньшей) дуги A_0A_k (не считая самих концов дуг A_0 и A_k) равно $td + k - 1$ для некоторого целого t . Аналогичный подсчёт количества вершин многоугольника Q , лежащих внутри (меньшей) дуги $A_{k+1}A_{d+1}$, даёт $sd + d - k - 1$. Приравнявая, получаем $td + k - 1 = sd + d - k - 1$, откуда $2k$ делится на d . В силу нечётности d получаем, что k делится на d ; это противоречит условию $k \in \{1, 2, \dots, d - 1\}$.

Замечание. В приведённом решении противоречие получается из подсчёта числа вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ и приравнивании этих количеств.

У этого рассуждения есть вариации; например, можно осуществить двойной подсчёт суммы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$.

Комментарий. Только сформулирована и доказана лемма или эквивалентное утверждение — 0 баллов.

Имеется продвижение в виде идеи приравнять количества вершин на равных дугах A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1}$ или приравнять сум-

мы углов в (равных) многоугольниках, отсекаемых от Q отрезками A_0A_k и $A_{k+1}A_{d+1} - 1$ балл.

Во в целом верном решении отсутствует или неверно доказательство леммы из решения выше (но формулировка её присутствует) — снимается 1 балл.

- 10.10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t , а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

(М. Антипов)

Ответ. При $n = 8$.

Решение. Мы будем называть многочлен вида $ax^2 + bx + c$ просто *многочленом*, а график такого многочлена — просто *графиком*. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Через любые три точки (a_i, b_i) ($i = 1, 2, 3$) с разными абсциссами проходит ровно один график.*

Доказательство. Один график, проходящий через эти точки, найдётся всегда — нетрудно проверить, что подходит многочлен

$$b_1 \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + b_2 \frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + b_3 \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

С другой стороны, если через три точки проходят графики двух разных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ имеет три корня a_1, a_2, a_3 , что невозможно. \square

Из леммы следует, что через любые *две* точки с разными абсциссами проходит бесконечно много графиков, и любые два из них пересекаются только по этим двум точкам.

Перейдём к решению. Будем считать, что Петя задумал два графика, за ход Вася называет Пете число t , а Петя отмечает точку с абсциссой t на одном из графиков. Можно считать, что

на разных ходах Вася называет разные t (иначе Петя повторит ответ).

Рассмотрим ситуацию после k ходов. Назовём пару графиков *подходящей*, если объединение этих графиков содержит все отмеченные Петей точки.

1) Покажем, что $k \geq 8$. Мы будем считать, что Петя изначально не рисует никаких графиков, а просто отмечает некоторые точки с данными абсциссами. Покажем, как ему действовать, чтобы после 7 ходов нашлись две подходящих пары графиков такие, что все 4 графика различны; это и будет означать, что Вася не смог добиться требуемого, ибо Петя мог нарисовать любую из этих пар.

Будем обозначать точку, появляющуюся после i -го хода, через $A_i = (a_i, b_i)$. На первых двух ходах Петя выбирает $b_1 = b_2 = 0$. На следующих 4 ходах Петя отметит точки A_3 и A_4 на графике F_+ многочлена $f_+(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и точки A_5 и A_6 — на графике F_- многочлена $f_-(x) = -(x - a_1)(x - a_2)$.

Седьмым ходом Петя выбирает точку A_7 , не лежащую ни на одном из графиков, проходящем через какие-то три точки из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 . Тогда существуют графики G_+ и G_- , проходящие через тройки точек A_5, A_6, A_7 и A_3, A_4, A_7 ; согласно нашему выбору, эти графики различны и отличаются от F_+ и F_- . Значит, пары (F_+, G_+) и (F_-, G_-) — подходящие, и все эти четыре графика различны, то есть Вася не сможет добиться требуемого.

2) Покажем, как Васе добиться требуемого за 8 ходов. На первых 7 ходах он называет 7 произвольных различных чисел. Назовём график *подозрительным*, если он проходит хотя бы через три точки, отмеченных Петей на этих ходах. Назовём число *плохим*, если два различных подозрительных графика имеют общую точку с абсциссой a . Существует лишь конечное количество подозрительных графиков и, следовательно, лишь конечное количество плохих чисел.

На восьмом ходу Вася называет любое неплохое число a_8 . После того, как Петя отметит восьмую точку, возможны два случая.

Случай 1. Существует график G многочлена $f(x)$, содержа-

щий пять из восьми отмеченных точек. Три из этих точек лежат на одном из пятиных графиков; по лемме, этот график совпадает с G . Значит, Васе достаточно назвать многочлен $f(x)$.

Случай 2. Такого графика нет. Это значит, что на каждом из пятиных графиков лежит ровно по 4 отмеченных точки; поэтому оба этих графика подозрительны. Докажем, что существует единственная пара подозрительных графиков, содержащих в совокупности все 8 отмеченных точек; тогда Васе достаточно назвать любой из соответствующих многочленов.

Пусть (G_1, H_1) и (G_2, H_2) — две таких пары, причём H_1 и H_2 содержат A_8 . Согласно выбору числа a_8 , это может произойти лишь при $H_1 = H_2$. Но тогда каждый из графиков G_1 и G_2 проходит через 4 отмеченных точки, не лежащих на H_1 , и они совпадают согласно лемме. Значит, и наши пары совпадают.

Замечание 1. Если Петя за первые 6 ходов не отметит 4 точек, лежащих на одном графике, то Вася сможет найти один из многочленов седьмым ходом, действуя аналогично описанному выше.

Замечание 2. При описанной стратегии Васи *может* случиться, что существуют две различных пары подозрительных пары, каждая из которых содержит в объединении все 8 отмеченных точек. Например, если точки A_3, A_4, \dots, A_8 лежат на одном графике F , а тройки точек (A_1, A_2, A_3) и (A_1, A_2, A_4) задают графики G_1 и G_2 , то пары (F, G_1) и (F, G_2) — подходят.

Комментарий. Лемма из решения выше считается известной; за отсутствие её доказательства баллы не снимаются, а за наличие доказательства — не начисляются.

Только ответ — 0 баллов.

Любое полное решение состоит из двух частей; баллы, полученные за разные части, складываются.

Часть 1: доказательство того, что за 7 вопросов Вася не сумеет добиться требуемого (максимум 4 балла).

Полное доказательство — 4 балла.

Доказано только, что Вася не сможет добиться требуемого за 6 ходов — 1 балл (не суммируется с баллами за другие движения в этой части).

Часть 2: доказательство того, что за 8 ходов Вася сумеет добиться требуемого (максимум 3 балла).

Полное доказательство — 3 балла.

Приведён алгоритм, позволяющий Васе добиться требуемого, но обоснование его отсутствует или неверно — 1 балл.

Верного алгоритма нет, но присутствует идея выбора последнего называемого Васей числа a_k так, чтобы никакие два подозрительных графика не пересекались в точке с абсциссой a_k — 1 балл (не суммируется с предыдущим).

Если обоснование верного алгоритма работает в одном из случаев, разобранных выше, но упускает другой случай (или неверно в этом случае) — снимается 1 балл.

Нетрудно доказать, что Вася сумеет добиться требуемого за 9 ходов (поскольку две пары графиков имеют лишь 8 общих точек). Если в Части 2 доказано лишь это — ставится 1 балл. Этот балл не суммируется с другими продвижениями в этой части.