



Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Региональный этап

15 февраля 2020 года

Конкурс: 9 класс

Второй тур. Задачи. Решения.

Продолжительность работы — 140 минут.

Максимальное количество баллов за задачи — 120.

Каждая задача оценивается из 30 баллов.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2020 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2019/2020 учебном году» (раздел 4). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки задач члены жюри делятся на рабочие группы, каждая группа проверяет конкретную задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к решениям, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем жюри или его заместителем. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального

этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником не общеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для до-

казательства его полноты и правильности, излагать необязательно.

12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила получаемых выводов, штрафуются меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобраных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из свое-

го опыта и справедливости. В спорных случаях пишите нам. Если ЦПМК захочет дать комментарии по проверке отдельных заданий (например, ответить на часто задаваемые вопросы), она сделает это на странице

<http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/2020/grading>. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: cpmk@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Для справки. Критерии выполнения заданий олимпиады. В таблице приведено количество баллов, при котором задание считается выполненным. Эти сведения нужны для подсчета статистики результатов олимпиады; на индивидуальные результаты участников не влияют.

Номер задания	Баллы
1	2
2	6
3	10
4	14
5	12
6	12
7	12
8	12

Задание 5. Условный потолок**(30 баллов)**

Фирма М продает некое лекарство в две страны — А и В. Фирма является монополистом на мировом рынке данного лекарства, так как она обладает патентом на его производство. В стране А спрос описывается уравнением $Q_A = 30 - P_A$, а в стране В — уравнением $Q_B = 10 - P_B$. Издержки производства считайте равными нулю. Фирма может назначать разные цены в разных странах, так как покупка лекарств иностранцами и перепродажи эффективно блокируются.

а) (10 баллов) Найдите цены P_A^* и P_B^* , которые назначит фирма в отсутствие вмешательства государства.

б) (20 баллов) Президент страны А, ратуя за доступность лекарств, ввел следующее правило: фирма М не может назначать цену в стране А выше, чем в стране В. Теперь фирма М назначает цены так, чтобы прибыль была максимальная с учетом этого правила. Удастся ли президенту с помощью этой меры добиться снижения цены в своей стране?

Решение

а) Составим функцию прибыли:

$$\pi = (30 - P_A)P_A + (10 - P_B)P_B.$$

Эта функция — сумма двух не зависящих друг от друга парабол с ветвями вниз, значит, ее значение будет максимально, когда максимума достигает каждая из парабол. Это происходит при $P_A^* = 15$ и $P_B^* = 5$.

б) В пункте а) цена в стране А оказалась выше, поэтому максимизировать прибыль так, как раньше, фирма не сможет. Она будет назначать одинаковые цены на двух рынках, то есть фактически столкнется с общей функцией спроса:

$$Q = \begin{cases} 30 - P, & \text{если } 10 \leq P \leq 30; \\ 40 - 2P, & \text{если } 0 \leq P \leq 10. \end{cases}$$

Функция прибыли имеет вид:

$$\pi = \begin{cases} (30 - P)P, & \text{если } 10 \leq P \leq 30; \\ (40 - 2P)P, & \text{если } 0 \leq P \leq 10. \end{cases}$$

На первом участке фирма работает только на рынке страны А. Как и в предыдущем пункте, оптимальная цена в стране А при этом равна 15, а прибыль равна 225.

На втором участке ($P \leq 10$) фирма обслуживает рынки в обеих странах. Парабола $(40 - 2P)P$ имеет ветви вниз и максимум в точке $P = 10$, прибыль при этом равна 200, то есть меньше, чем в предыдущем случае. Можно также заметить, что при такой цене фирма ничего не продает на рынке страны В, а на рынке страны А не получает максимальной прибыли.

Следовательно, цена в обеих странах будет 15. Таким образом, цена в стране А не изменится, президент своей цели не добьется.

Примечание. Многие европейские страны действительно привязывают цены на лекарства в своих странах к ценам в других странах. Предложения сделать это звучат и в США (о привязке к канадским ценам, которые ниже). В данной задаче обсуждается одна из причин, по которым данная политика может оказаться неэффективной: фирма может повысить цены в той стране, где изначально они были низки, чтобы не понижать их там, где они высоки.

Схема проверки

За арифметическую ошибку в любом из пунктов снимается 1 балл, если она не привела к существенным искажениям последующих ответов (то есть не повлияла на то, что в пункте а) лекарство в стране А стоит дороже, а в пункте б) не изменило решение фирмы работать только в первой стране).

В обоих пунктах прибыль можно максимизировать как функцию от объемов выпуска, но для полного балла за пункт цены должны быть посчитаны. Также в пункте а) можно выписывать не одну функцию прибыли, а две (по одной для каждой страны) и максимизировать каждую, так как фирма фактически максимизирует прибыль на рынках по отдельности (это происходит потому, что рынки не связывает общая функция издержек). В свою очередь, на каждом рынке можно приравнять предельный доход (например, в пункте а): $MR_A = 30 - 2Q_A$, $MR_B = 10 - 2Q_B$) к предельным издержкам ($MC = 0$).

Поскольку всякий раз монополия максимизирует прибыль при линейном спросе и постоянных предельных издержках (то есть все функции, которые нужно максимизировать, — параболы с ветвями вниз), достаточные условия максимума можно проверить только один раз (в любом месте решения, для любой параболы). Если достаточные условия не проверяются ни разу, снимается 2 балла один раз за всю задачу.

Под проверкой достаточных условий подразумевается любое из действий:

- Указание, что ветви параболы направлены вниз (в том числе в виде схематичного графика).
- Ссылка на то, что возрастание функции в найденных точках сменяется убыванием (то есть $MR > MC$ слева от оптимума, а также $MR < MC$ справа).
- Указание, что производная при пересечении нуля из положительной становится отрицательной (или что вторая производная отрицательна).
- Построена схематичная иллюстрация модели монополии с линейным спросом и функцией MR , а также горизонтальными (необязательно нулевыми) предельными издержками; отмечен оптимум.

а) Поиск каждой из цен оценивается из 5 баллов.

Если участник проводит для какой-то из стран рассуждение через MR и MC , однако выражает MR через цену (например, $MR_A = 30 - 2P_A$, откуда $30 - 2P_A = MC$, то есть $P_A = 15$) то снимается 4 балла из 5, несмотря на правильный ответ. Такое рассуждение некорректно, поскольку в левой и в правой части уравнения $MR = MC$ присутствуют приращения прибыли при изменении разных переменных. Следовательно, если участник таким образом максимизирует прибыль в обеих странах, то он получает 2 балла за пункт.

б) Составление общей функции спроса и прибыли — 5 баллов. Эти баллы также ставятся, если очевидно, что участник, даже не составляя функции в явном виде, понимает необходимость рассмотрения двух вариантов ценообразования — с продажами в обеих странах или только в стране А.

Максимизация функции прибыли при продажах в обеих странах (которая в случае корректного расчета ведет к ответу $P = 10$) — 5 баллов.

Максимизация функции прибыли при продажах только в стране А (которая в случае корректного расчета ведет к ответу $P = 15$) — 3 балла. В этом месте достаточно ссылки на результат пункта а).

Сравнение прибылей, указание, что продавать в стране В невыгодно и вывод о цене, равной 15 — 7 баллов.

Если участник проводит для какого-то участка спроса рассуждение через MR и MC , однако выражает MR через цену (например, $MR = 40 - 4P$ для случая $P \leq 10$, откуда $40 - 4P = MC$, то есть $P = 10$) то за максимизацию на этом участке ставится 1 балл (из 5 или из 3).

Отметим, что цена в стране В может быть и выше 15 — это не нарушает правила $P_A \leq P_B$, но и не имеет значения, потому что спроса и выручки в этой стране всё равно не будет. Это рассуждение не оценивается баллами, а его отсутствие не приводит к их снижению.

Задание 6. Налог Греты**(30 баллов)**

Спрос на рынке авиаперевозок описывается уравнением $Q_d = 20 - P$, а предложение — уравнением $Q_s = P/3$. Выбросы двигателей самолетов загрязняют воздух и вносят вклад в парниковый эффект. Вред от этого зависит от объема перевозок и составляет aQ^2 д. е., где $a > 0$. Школьница Грета Т. считает, что данный внешний эффект нужно скорректировать с помощью потоварного налога на авиаперевозки, такого, при котором цена для потребителей вырастет на 20 %. Расчеты экономистов, однако, показали, что при введении такого налога величина общественного благосостояния не только не увеличится, но и уменьшится на 20 %.

а) (10 баллов) Определите значение ставки потоварного налога t , при котором цена для потребителей вырастет так, как хочет Грета.

б) (10 баллов) Определите значение параметра a , при котором верны расчеты экономистов.

в) (10 баллов) Определите значение ставки потоварного налога t^* , при котором общественное благосостояние будет максимально.

Для справки. Величина общественного благосостояния при объеме Q здесь равна сумме излишка потребителей (равного $CS = 0,5Q^2$ д. е.), излишка производителей после уплаты потоварного налога (равного $PS = 1,5Q^2$ д. е.) и величины налоговых сборов за вычетом вреда от выбросов.

Решение

а) Без налога равновесная цена определяется из уравнения $20 - P = P/3$, откуда $P = 15$. Пусть введен потоварный налог по ставке t . Тогда новая цена потребителей удовлетворяет уравнению $20 - P_d = (P_d - t)/3$. Новая цена потребителей должна равняться $15 \cdot 1,2 = 18$, значит $20 - 18 = (18 - t)/3$, $t = 12$.

Ответ: $t = 12$.

б) Рассчитаем величину общественного благосостояния до и после введения налога. Налоговые поступления равны $T = tQ$. Графическая иллюстрация представлена на рис. 6.1.

До введения налога объем равен $Q_0 = 20 - 15 = 5$, и величина общественного благосостояния равна $0,5Q_0^2 + 1,5Q_0^2 + 0 - aQ_0^2 = 50 - 25a$.

После введения налога объем равен $Q_1 = 20 - 18 = 2$, общественное благосостояние составляет $0,5Q_1^2 + 1,5Q_1^2 + tQ_1 - aQ_1^2 = 8 + 24 - 4a = 32 - 4a$.

Поскольку благосостояние падает на 20 %, имеем уравнение $32 - 4a = 0,8(50 - 25a)$, откуда $a = 0,5$.

Ответ: $a = 1/2$.

в) Чтобы получить равновесный объем Q , нужно ввести налог по ставке $t(Q) = P_d(Q) - P_s(Q) = 20 - Q - 3Q = 20 - 4Q$. Сборы при этом составят $Q(20 - 4Q)$. Значит, величина общественного благосостояния при объеме Q составляет

$$W(Q) = 0,5Q^2 + 1,5Q^2 + Q(20 - 4Q) - aQ^2 = 20Q - 2,5Q^2.$$

Промаксимизируем эту величину по Q , а затем найдем ставку налога $t(Q)$, реализующую этот объем. $W(Q)$ задает квадратичную параболу с ветвями вниз, максимум

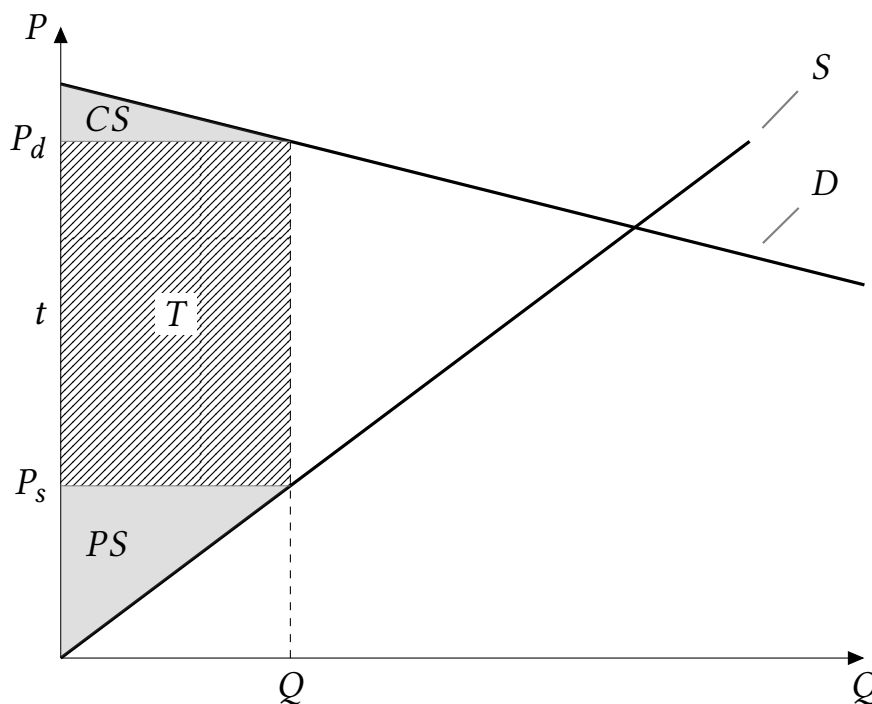


Рис. 6.1: Излишки.

достигается в вершине параболы $Q^* = 20/5 = 4$. Этот объем реализует ставка налога $t(4) = 4$.

Ответ: $t^* = 4$.

Примечание. Стандартный график темы «внешние эффекты» для ситуации, описанной в данной задаче, приведен на рис. 6.2.

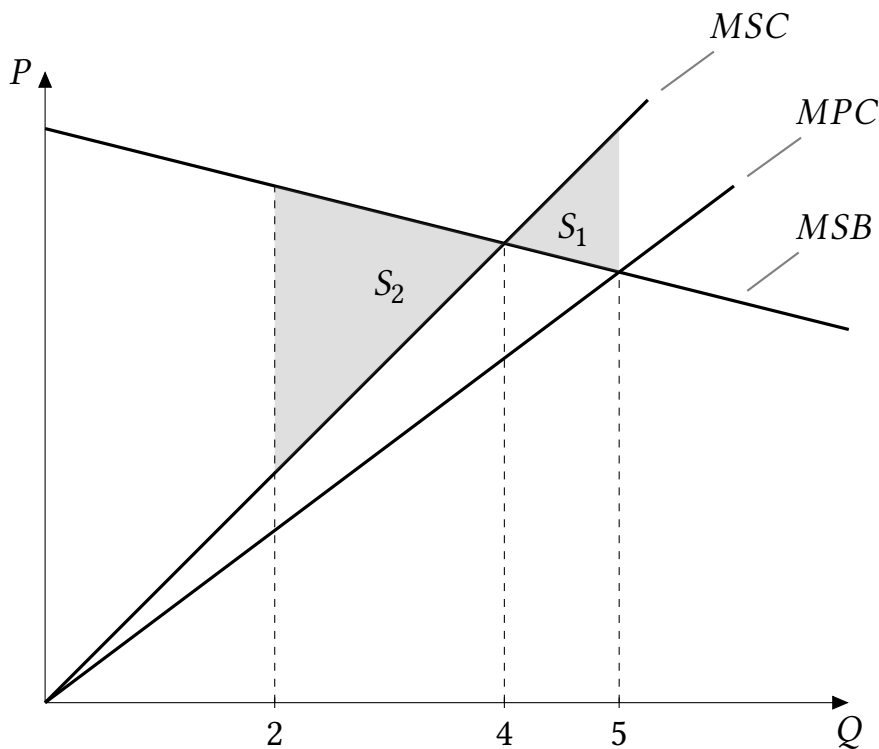


Рис. 6.2: Графическая иллюстрация к задаче.

Предельные общественные издержки больше частных, $MSC > MPC$ ($4Q > 3Q$), и потому корректирующий налог способен максимизировать благосостояние. При оптимальном налоге, снижающем выпуск с 5 до 4, выигрыш в благосостоянии по сравнению с невмешательством равен площади S_1 . Налог, предлагаемый Гретой, однако, слишком высок: он сокращает выпуск до 2, в результате чего благосостояние снижается даже по сравнению с первоначальной ситуацией. Графически это выражается в том, что площадь S_2 больше площади S_1 .

Схема проверки

В каждом из пунктов за одну арифметическую ошибку снимается 1 балл. Если в пункте б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, то пункт в) проверяется при (неверном) значении параметра a , найденном участником. Иными словами, в этом случае, если решение и ответ пункта в) верны для значения параметра a , найденного участником, баллы в в) не снимаются.

а) Нахождение первоначального равновесия — 3 балла. Нахождение новой требуемой цены ($P = 18$) — 2 балла. Составление уравнения нового равновесия — 4 балла. Правильное решение этого уравнения — 1 балл.

б) Нахождение старого и нового общественного благосостояния в зависимости от параметра a — по 4 балла. Составление уравнения на a — 1 балл., его решение — 1 балл.

в) В данном пункте участник может максимизировать функцию общественного благосостояния по Q (как в решении выше), а может по t , сперва найдя функцию $Q(t) = (20 - t)/4$. Оба решения равноценны. За нахождение функции $Q(t)$ или $t(Q)$ — 3 балла. За составление функции общественного благосостояния от Q или от t — 5 баллов. За ее нахождение точки ее максимума — 1 балл. За проверку достаточных условий (ветви параболы направлены вниз или вторая производная меньше нуля) — 1 балл.

Кроме того, некоторые участники могут решить данный пункт через приравнивание спроса к предельным общественным издержкам (см. рис. выше). Такое решение также корректно. В этом случае баллы «за составление функции общественного благосостояния» ставятся за корректное нахождение функции предельных общественных издержек ($MSC = 4Q$) и составление верного уравнения. Проверкой достаточного условия максимума является указание на то, что предельные общественные издержки возрастают.

Задание 7. Пикеттия**(30 баллов)**

В стране Пикеттии есть три группы населения (бедные, средний класс и богатые), внутри каждой из которых доходы распределены равномерно. Бедные составляют 40 % населения и располагают 10 % суммарного дохода страны, средний же класс составляет 20 % населения и располагает 20 % суммарного дохода.

а) (8 баллов) Найдите коэффициент Джини, отражающий неравенство в распределении доходов между бедными и средним классом (не считая богатых).

б) (8 баллов) Найдите коэффициент Джини, отражающий неравенство в распределении доходов между средним классом и богатыми (не считая бедных).

в) (14 баллов) Правительство страны рассматривает два варианта перераспределительной политики, направленной на снижение неравенства. При первом доходы богатых не изменятся, но распределение доходов между бедными и средним классом станет равномерным. При втором варианте доходы бедных не изменятся, зато распределение доходов между средним классом и богатыми станет равномерным. При каком из двух вариантов коэффициент Джини в стране уменьшится сильнее?

Решение

Во всех пунктах мы будем использовать известную формулу для коэффициента Джини, если в стране есть две группы населения: $G = \alpha - \beta$, где α — доля более бедной группы в населении, β — ее доля в суммарном доходе. Выводить и доказывать эту формулу в рамках решения задачи не требуется.

а) Бедные составляют $\frac{0,4}{0,4+0,2} = \frac{2}{3}$ от населения «страны», состоящей из бедных и среднего класса и располагают $\frac{0,1}{0,1+0,2} = \frac{1}{3}$ ее дохода. Значит, искомый коэффициент Джини составляет

$$G = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

б) Богатые составляют 40 % населения и имеют 70 % дохода всей страны. Аналогично пункту а), получаем, что искомый коэффициент Джини равен

$$G = \frac{0,2}{0,4 + 0,2} - \frac{0,2}{0,7 + 0,2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

(Более бедной группой является в данном случае средний класс.)

в) Для ответа на поставленный вопрос достаточно рассчитать коэффициенты Джини после вмешательства. При первом варианте новый коэффициент Джини будет равен $(0,4 + 0,2) - (0,1 + 0,2) = 0,3$, так как в стране будет единая более бедная группа, составляющая 60 % населения и обладающая 30 % дохода. При втором варианте новый коэффициент Джини будет равен $0,4 - 0,1 = 0,3$. Значит, варианты равнозначны.

Графически ситуация сводится к рис. 7.1. Построение кривых Лоренца для корректного решения необязательно, однако решение «напрямую» через расчет площадей (без использования формулы $G = \alpha - \beta$), конечно, возможно.

Примечание: Можно подумать, что раз коэффициент Джини между бедным и средним классом больше, чем между средним классом и богатыми ($1/3 > 1/9$),

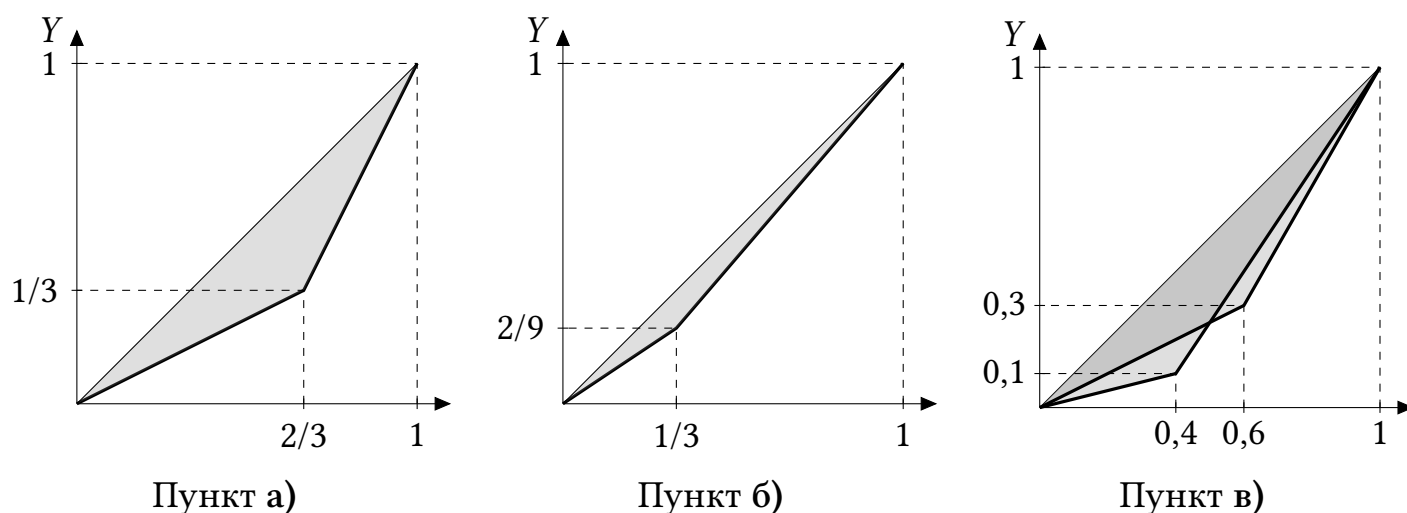


Рис. 7.1: Кривые Лоренца.

то устранение неравенства между бедными и средним классом окажет больший эффект на снижение общего неравенства, чем устранение неравенства между средним классом и богатыми. Иными словами, ответы в а) и б) наталкивают на мысль, что первый вариант должен быть предпочтительнее. Пункт в) показывает, что это необязательно так.

Схема проверки

Во всех пунктах формулу $G = \alpha - \beta$ не нужно обосновывать. При этом картинки рисовать необязательно. Однако участник может и не пользоваться ей, а рассчитывать коэффициент Джини по определению. Арифметическая ошибка ведет к снятию 1 балла, если она качественно не поменяла результаты.

а) 4 балла за нахождение долей бедных или среднего класса в населении и доходе новой «страны» и 4 балла за расчет коэффициента Джини. Если в данном пункте участник рассчитывает коэффициент Джини как $G = 0,4 - 0,1 = 0,3$, за пункт ставится 0 баллов.

б) 4 балла за нахождение долей богатых или среднего класса в населении и доходе новой «страны» и 4 балла за расчет коэффициента Джини. Если в данном пункте участник рассчитывает коэффициент Джини как $G = 0,2 - 0,2 = 0$, за пункт ставится 0 баллов.

в) 7 баллов за расчет коэффициента Джини при первом варианте, 7 баллов за расчет коэффициент Джини при втором варианте.

Задание 8. Овощная Страна

(30 баллов)

В Овощной Стране есть два региона (А и В), в каждом из которых выращивают помидоры (X) и огурцы (Y). В регионе А каждый житель может произвести 1 кг помидоров или 1 кг огурцов в день. В регионе В каждый житель может произвести 0,8 кг помидоров или $k \in (0; 6]$ кг огурцов в день. Овощи потребляются только в комплектах (в порциях салата), состоящих из килограмма огурцов и килограмма помидоров. Население региона А составляет 6000 человек, а население региона В составляет 1000 человек.

а) (3 балла) Предположим, что все овощи потребляются только в тех регионах, где они произведены, распределение салата между жителями внутри региона равномерное. Какое максимальное количество порций салата (комплектов) может ежедневно получать каждый житель региона А?

б) (5 баллов) Ответьте на вопрос предыдущего пункта для жителей региона В.

в) (10 баллов) В Овощной Стране введено центральное планирование. Теперь производство осуществляется так, чтобы суммарное потребление салата в стране было максимальным. При этом комплекты будут распределяться поровну между всеми жителями обоих регионов. Сколько порций салата будет произведено в день?

г) (6 баллов) Будем говорить, что некто проигрывает, если потребление им салата уменьшается. При каких значениях параметра $k \in (0; 6]$ жители региона А проиграют от центрального планирования?

д) (6 баллов) Ответьте на вопрос предыдущего пункта для жителей региона В.

Решение

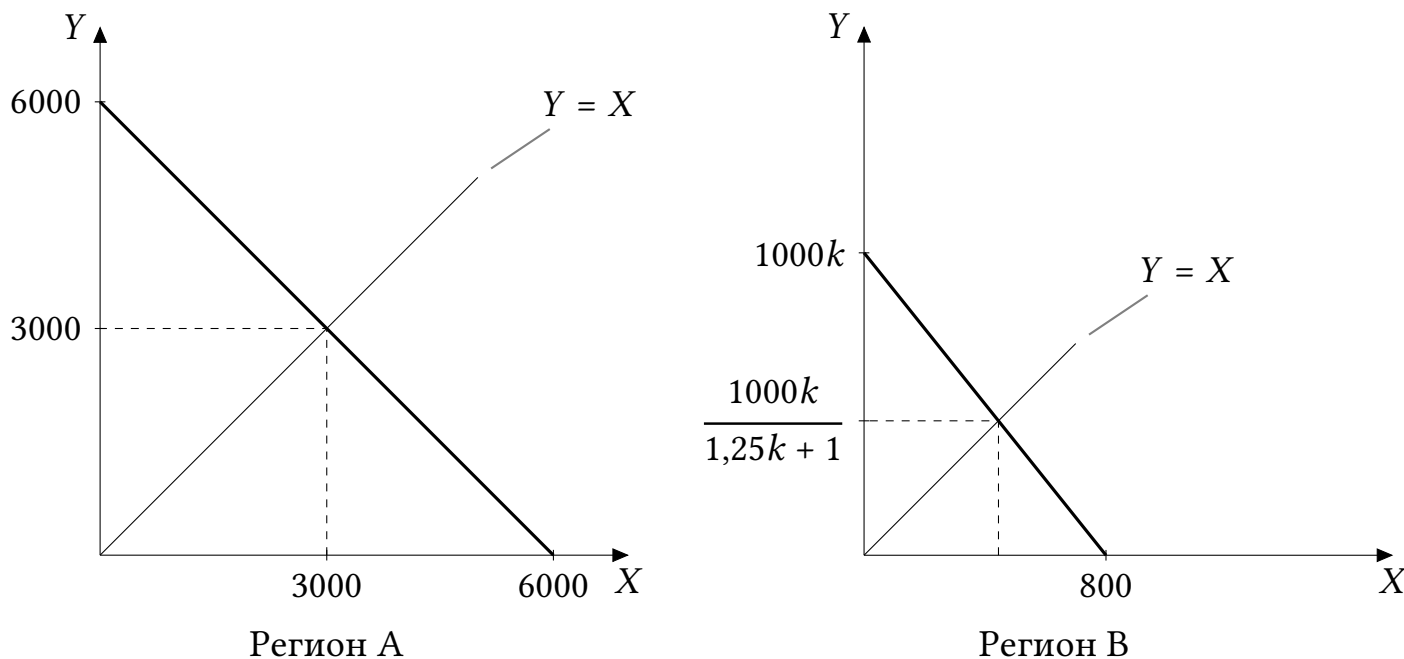


Рис. 8.1: Отсутствие обменов.

а) Каждый житель может произвести 0,5 кг помидоров и 0,5 кг огурцов соответственно, он и получит 0,5 порции салата. Всего в регионе будет произведено 3000 кг

каждого вида овощей, то есть 6000 кг салата. Уравнение КПВ региона имеет вид: $X_A + Y_A = 6000$.

б) Пусть L_X — количество работников, занятых производством помидоров, а, L_Y — производством огурцов. Тогда:

$$X_B = 0,8L_X; \quad Y_B = kL_Y; \quad L_X + L_Y = 1000.$$

Уравнение КПВ региона В:

$$\frac{X_B}{0,8} + \frac{Y_B}{k} = 1000.$$

Приравнивая $X = Y$, получаем:

$$Y_B = X_B = \frac{1000k}{1,25k + 1}.$$

Значит, каждому жителю региона достанется по $k/(1,25k + 1)$ кг помидоров и огурцов, то есть по $k/(1,25k + 1)$ порции салата (комплектов).

в) Построим суммарную КПВ. Альтернативная стоимость 1 кг помидоров в регионе А равна 1 кг огурцов. Альтернативная стоимость 1 кг помидоров в регионе В равна $1,25k$ кг огурцов. Вид общей КПВ будет зависеть от соотношения альтернативных стоимостей, то есть от того, $k \leq 0,8$ или $k > 0,8$.

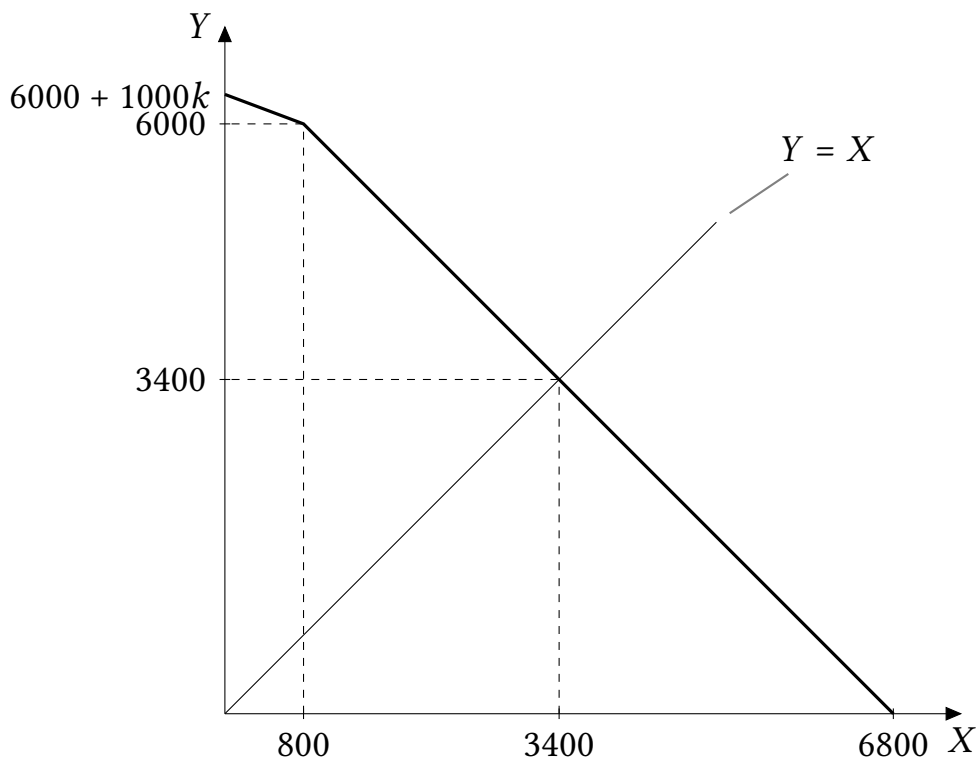


Рис. 8.2: $k \leq 0,8$

Случай 1. $k \leq 0,8$. (Случай $k = 0,8$ можно включить как в случай 1, так в случай 2). Суммарная КПВ будет иметь вид как на рис. 8.2. Поскольку $6000/800 > 1$, луч $Y = X$

пересечет ее на нижнем участке, имеющем уравнение $Y = 6800 - X$. Значит, $6800 - X = X$, откуда $X = 3400$. Это и будет суммарное количество произведенных порций салата.

Случай 2. $k > 0,8$. Суммарная КПВ будет иметь вид как на рис. 8.3 .

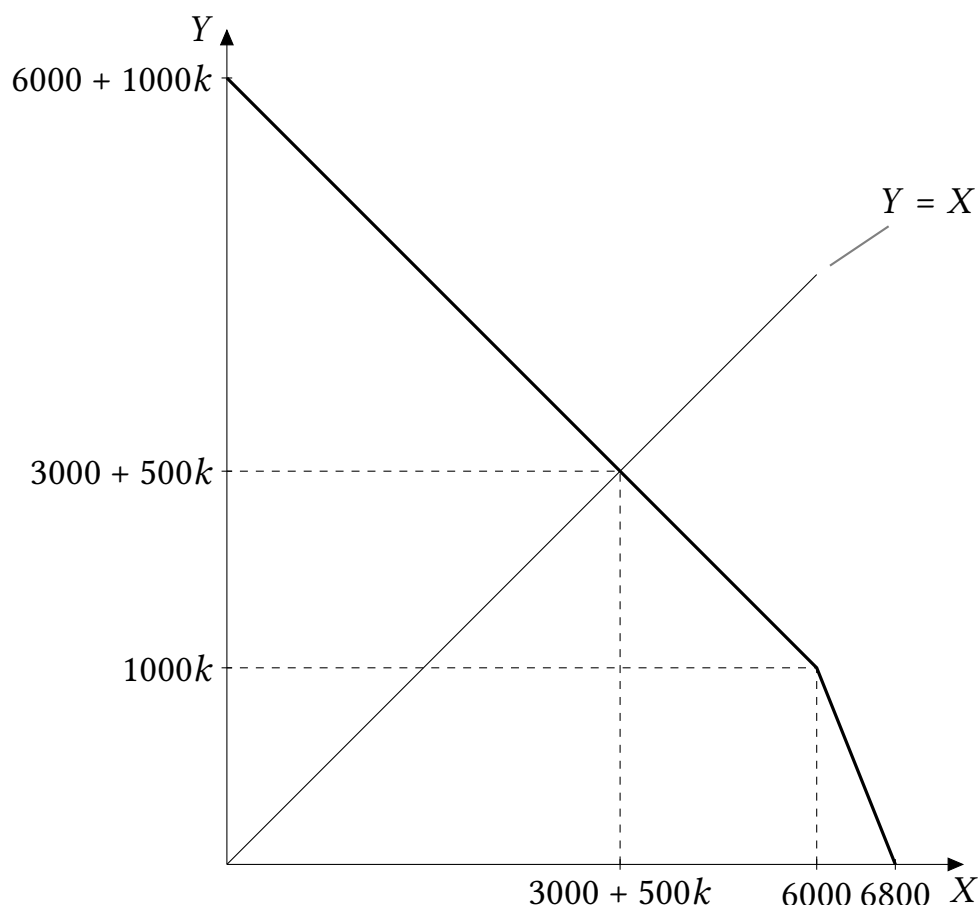


Рис. 8.3: $k > 0,8$

Поскольку по условию $k \leq 6$, луч $Y = X$ пересечет ее на верхнем участке, имеющем уравнение $Y = 6000 + 1000k - X$. Значит, $Y = 6000 + 1000k - X = X$, откуда $X = 3000 + 500k$.

Подытоживая, получаем, что суммарное количество произведенных порций салата равно

$$X = Y = \begin{cases} 3400, & k \leq 0,8; \\ 3000 + 500k, & k \in (0,8; 6]. \end{cases}$$

г) Потребление каждым жителем страны салата при центральном планировании равно (в порциях)

$$\frac{X}{7000} = \frac{Y}{7000} = \begin{cases} \frac{34}{70}, & k \leq 0,8; \\ \frac{6+k}{14}, & k \in (0,8; 6]. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{34}{70} < \frac{35}{70} = 0,5$, при $k \leq 0,8$ жители региона А точно проиграют от планирования. При $k > 0,8$ они проиграют, если $\frac{6+k}{14} < 0,5$, то есть $k < 1$. Объединяя эти два случая, получаем, что жители страны А проиграют при $k \in (0; 1)$.

д) Аналогичным образом получаем, что при $k \leq 0,8$ жители страны В проиграют, если $\frac{34}{70} < \frac{k}{1,25k+1}$, то есть если $68 < 55k$, что невозможно при $k \leq 0,8$. Значит, в этом случае они точно не проиграют.

Если же $k \in (0,8; 6]$, жители страны В проиграют, если

$$\frac{6+k}{14} < \frac{k}{1,25k+1}.$$

После преобразований получаем квадратное неравенство $5k^2 - 22k + 24 < 0$. Решением этого неравенства является область между корнями уравнения $5k^2 - 22k + 24 = 0$. Решая уравнение, получаем

$$k_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{5} = 2; \frac{12}{5}.$$

Поскольку $\frac{12}{5} = 2,4 < 6$, весь интервал $(2; 2,4)$ входит в множество значений параметра, рассматриваемое в данном случае. Значит, весь интервал $(2; 2,4)$ и будет ответом. Жители страны Б проиграют при $k \in (2; 2,4)$.

Примечание 1. Если бы регионы просто начали бы торговать друг с другом, то, как известно, ни одному не стало бы хуже по сравнению с пунктами а), б). Данная задача показывает, что в отличие от торговли, при центральном планировании и «уровнировке» любой из регионов может пострадать, даже если суммарное производство увеличивается.

Примечание 2. Несложно показать, что при $k > 6$ обе страны не проиграют от центрального планирования. Значит, ответы в г) и д) являются верными при рассмотрении всех $k > 0$.

Схема проверки

В каждом из пунктов иллюстрации для полного балла необязательны, если приведены аналитические уравнения КПВ.

За арифметическую ошибку снимается 1 балл. Если арифметическая ошибка в каком-либо из пунктов повлияла на ответ в одном из последующих пунктов, то далее за нее баллы не снимаются, то есть последующие пункты проверяются относительно ответов, полученных выше. Отметим, что этот принцип применяется, только если ошибка была именно арифметической.

а) Засчитывается любое корректное объяснение, необязательно выписывать КПВ региона.

б) В этом пункте ответ уже не очевиден без аналитической работы. Выписывание уравнения КПВ региона — 3 балла. Нахождение суммарного производства товаров в регионе — 1 балл. Нахождение подушевого потребления — 1 балл.

в) Правильное рассмотрение каждого из случаев — по 5 баллов.

г) Расчет подушевого потребления — 1 балл. Верное решение при $k \leq 0,8$ — 2 балла. Верное решение при $k > 0,8$ — 3 балла.

д) Верное решение при $k \leq 0,8$ — 2 балла. Верное решение при $k > 0,8$ — 4 балла.