

## 10 класс

## Первый день

- 10.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то число (не обязательно целое). Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек?
- 10.2. Дан выпуклый четырёхугольник периметра  $10^{100}$ , у которого длины всех сторон — натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвёртой стороны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.
- 10.3. Клетки таблицы  $2 \times 2019$  надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причём сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?
- 10.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такова, что при всех натуральных  $n \geq 2018$  число  $a_{n+1}$  является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_n.$$

Докажите, что существует такое  $N$ , что в бесконечной последовательности  $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$  каждый член меньше предыдущего.

- 10.5. В неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . Продолжение медианы, проведённой из вершины  $B$ , пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $D$ . Через центр окружности, описанной около треугольника  $BDL$ , проведена прямая  $\ell$ , параллельная прямой  $AC$ . Докажите, что окружность  $\omega$  касается прямой  $\ell$ .

## 10 класс

## Первый день

- 10.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то число (не обязательно целое). Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек?
- 10.2. Дан выпуклый четырёхугольник периметра  $10^{100}$ , у которого длины всех сторон — натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвёртой стороны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.
- 10.3. Клетки таблицы  $2 \times 2019$  надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причём сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?
- 10.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такова, что при всех натуральных  $n \geq 2018$  число  $a_{n+1}$  является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_n.$$

Докажите, что существует такое  $N$ , что в бесконечной последовательности  $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$  каждый член меньше предыдущего.

- 10.5. В неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . Продолжение медианы, проведённой из вершины  $B$ , пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $D$ . Через центр окружности, описанной около треугольника  $BDL$ , проведена прямая  $\ell$ , параллельная прямой  $AC$ . Докажите, что окружность  $\omega$  касается прямой  $\ell$ .