



Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Региональный этап

19 января 2019 года

Конкурс: 10-11 класс

Второй тур. Задачи. Решения.

Продолжительность работы — 140 минут.

Максимальное количество баллов за задачи — 120.

Каждая задача оценивается из 30 баллов.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2019 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2018/2019 учебном году» (раздел 4). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки задач члены жюри делятся на рабочие группы, каждая группа проверяет конкретную задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к решениям, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем жюри или его заместителем. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального

этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником не общеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для до-

казательства его полноты и правильности, излагать необязательно.

12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила получаемых выводов, штрафуются меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобраных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Схемы проверки некоторых задач написаны в форме классификации некорректностей (недочетов, ошибок, изъянов) в решениях участников. В этих задачах нужно руководствоваться соотношением баллов и наборов нарушений, приведенным в таблице ниже. В этих случаях удобно указывать в работе участника, какие именно пункты из схемы применялись при проверке (например, *H2*, *I1* и т. п.), чтобы снизить число вопросов на показе работ. Если в работах участников встречаются некорректности (или продвижения), не описанные в авторских схемах проверки, жюри должно самостоятельно определить их тяжесть (или ценность) и отнести к одному из типов в классификации. Хотелось бы предостеречь от чрезмерного пополнения перечня *минимальных продвижений* (для выставления «поощрительных баллов»), поскольку участники, не решившие ни одной задачи, но набравшие во всех задачах «поощрительные баллы», имеют меньше шансов на успешное выступление на последующих



олимпиадах, чем те, кто решили немного задач, но полностью. В частности, не нужно считать *минимальным продвижением* выписывание правильной формулы (без ее дальнейшего применения) «из учебника», чтобы не стимулировать участников в дальнейшем выписывать все известные им формулы вместо решения задачи.

Баллы	Описание
30	Полное верное решение без недочетов
25	Решение верное, но в нем есть недочеты (один или несколько)
20	Решение в целом верное, но в нем есть одна ошибка
15	Решение в целом верное, однако в нем есть одна ошибка и один или несколько недочетов
10	В решении имеется несколько ошибок или один изъян (наличие недочетов не имеет значения)
5	Решение участников в целом неверное (то есть в нем есть больше ошибок и изъянов, чем описано выше), однако в нем есть и минимальные продвижения (одно или несколько)
0	Решение участников неверное, минимальное продвижение отсутствует

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения” – в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В спорных случаях пишите нам. Если ЦПМК захочет дать комментарии по проверке отдельных заданий (например, ответить на часто задаваемые вопросы), она сделает это на странице <http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/2019/grading>. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: cpmk@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Задача 1. Ускорение производства**(30 баллов)**

Одна из распространенных задач в управленческом консалтинге — не только снизить издержки производства, но и *ускорить* его, чтобы фирма могла произвести больше продукции в единицу времени. Рассмотрим фирму-монополиста Φ . Изначально ее издержки производства описываются функцией $TC(q) = 10q$, функция спроса имеет вид $q = 40 - 2P$ единиц в месяц. Изначально максимальная скорость производства такова, что фирма Φ может произвести не более 8 единиц продукции в месяц.

а) (8 баллов) Найдите максимальную прибыль фирмы.

б) (8 баллов) Консалтинговая компания МВВ предлагает фирме план А, при реализации которого без увеличения скорости производства себестоимость упадет на 40 % при любом объеме производства. При этом фирма Φ должна будет платить компании МВВ комиссию Y каждый месяц. Найдите максимальное значение Y , которое согласится заплатить фирма Φ .

в) (6 баллов) Вместо плана А фирме Φ предлагают план Б, согласно которому максимальная скорость производства вырастет и позволит фирме выпустить на 50 % больше продукции в месяц, чем раньше. Найдите максимальное значение Y в этом случае.

г) (8 баллов) У фирмы Φ есть возможность внедрить оба плана одновременно. Найдите максимальное значение Y в этом случае.

Решение

а) Найдем первоначальный оптимум, для чего составим функцию прибыли.

$$\pi_0(q) = (20 - q/2)q - 10q = 10q - q^2/2.$$

Фирма максимизирует эту функцию на отрезке $[0; 8]$. Функция является квадратичной, ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $q = 10$. (Это значение можно найти и приравняв производной прибыли к 0.) Следовательно, функция возрастает на допустимом отрезке $[0; 8]$, оптимальный выпуск равен $q_0^* = 8$. При этом максимальная прибыль составит $\pi_0(8) = 80 - 32 = 48$.

Тот же результат можно получить, проанализировав функции предельного дохода ($MR = 20 - q$) и предельных издержек ($MC = 10$). При всех $q \leq 8$ выполнено $MR > MC$, так что производство всех 8 единиц выгодно фирме, то есть оптимальное значение $q^* = 8$. Функции MR и MC пересекаются в точке $q = 10$, но это больше допустимого количества.

б) После внедрения плана А функция издержек примет вид $TC(q) = 0,6 \cdot 10q + Y = 6q + Y$.

Функция прибыли примет вид

$$\pi_1(q) = (20 - q/2)q - (6q + Y) = 14q - q^2/2 - Y.$$

Фирма максимизирует эту функцию на отрезке $[0; 8]$. Функция является квадратичной, ветви параболы направлены вниз, вершина параболы находится в точке $q = 14$. Следовательно, функция возрастает на отрезке $[0; 8]$, оптимальный выпуск равен $q_1^* = 8$. При этом максимальная прибыль составит $\pi_1(8) = 112 - 32 - Y = 80 - Y$.

Тот же результат можно получить, проанализировав функции предельного дохода ($MR = 20 - q$) и предельных издержек ($MC = 6$). При всех $q \leq 8$ выполнено $MR > MC$, так что производство всех 8 единиц выгодно фирме, то есть оптимальное значение $q^* = 8$. Функции MR и MC пересекаются в точке $q = 14$, но это больше допустимого количества.

Для получения этого ответа можно формально не максимизировать новую функцию прибыли. Заметим, что при снижении предельных издержек монополиста его оптимальный выпуск увеличится, так как в силу убывания функции MR ее пересечение с MC будет правее, чем раньше. А значит, фирма по-прежнему будет производить максимально доступное количество товара.

Чтобы узнать максимально допустимое для фирмы значение Y , решим неравенство $80 - Y \geq 48$. Получаем, что за план А фирма будет готова платить не более, чем 32 ден. ед.

в) Функция прибыли не изменится; изменится отрезок, на котором фирма проводит оптимизацию. Теперь фирма будет максимизировать прибыль на отрезке $[0; 12]$. Заметим, что теперь отрезок содержит вершину параболы $q^* = 10$, найденную в пункте а). Значит, фирма выберет этот объем выпуска. Максимальная прибыль составит $\pi_0(10) - Y = 50 - Y$.

Решая неравенство $50 - Y \geq 48$, получаем, что за план Б фирма будет готова платить не более, чем 2 ден. ед.

г) Теперь изменится и функция прибыли, и отрезок. Фирма будет максимизировать функцию $\pi_1(q) = 14q - q^2/2 - Y$ на отрезке $[0; 12]$. В пункте б) мы видели, что эта функция является квадратичной, ветви параболы направлены вниз, вершина параболы находится в точке 14. Следовательно, функция возрастает на отрезке $[0; 12]$, оптимальный выпуск равен 12. Максимальная прибыль составит $\pi_1(12) = 14 \cdot 12 - 12^2/2 - Y = 12 \cdot (14 - 6) - Y = 12 \cdot 8 - Y = 96 - Y$.

Решая неравенство $96 - Y \geq 48$, получаем, что за план Б фирма будет готова платить не более, чем 48 ден. ед.

Примечание 1. Почему ответ в г) получился большим, чем сумма ответов в б) и в)? Дело в том, что чем больше единиц продукции фирма может выпустить, тем более выгодным для нее является потенциальное снижение себестоимости, и поэтому между этими мерами, как говорят, возникает *синергия*.

Примечание 2. В жизни, как правило, консультанты работают над повышением производительности фирм, что одновременно снижает себестоимость и увеличивает максимальный объем производства (как в пункте г)). Действительно, допустим фирма располагает K единиц капитала, каждая из которых производит a единиц продукции; аренда каждой единицы капитала обходится в r ден. ед. в месяц. Тогда средние издержки производства содержат слагаемое r/a , а максимальный объем производства равен aK . При росте a будет наблюдаться как снижение себестоимости, так и рост максимального объема производства.

Примечание 3. В качестве дополнительного задания на уроках экономики можно найти, площадям каких фигур на стандартном графике монополии соответствуют ответы этой задачи.

Примечание 4. Участник может всюду считать максимальную прибыль без учета платы консультантам (Y), а затем считать разность прибылей для ответа на вопрос о том, сколько фирма готова заплатить. Такое решение корректно.

Схема проверки

За арифметическую ошибку в любом из пунктов снимается 1 балл, если она не привела к существенным искажениям последующих ответов (то есть не повлияло на решение фирмы о производстве максимально допустимого количества). При этом, если ошибка, например, в пункте а) повлекла за собой неправильный ответ в пунктах б) и в), 1 балл снимается только один раз.

а) Если объем $q = 10$ получен с помощью нахождения вершины параболы и сделан вывод о том, что оптимальный объем равен 8, но при этом не указано, что ветви параболы направлены вниз, снимается 3 балла. Действительно, именно то, что ветви параболы направлены вниз, означает, что функция прибыли возрастает на отрезке $[0; 8]$ и что оптимальным является объем $q = 8$.

Аналогично, если ответ получен с помощью анализа MR и MC , то должна быть ссылка на то что $MR > MC$ на всем допустимом отрезке (при этом сам объем $q = 10$, где они пересекаются, искать необязательно), без такой ссылки при правильном ответе участник теряет 3 балла.

Таким образом, следующие рассуждения оцениваются в 5 баллов из 8:

1) Составим функцию прибыли. Ее максимум в точке $q = 10$, но эта точка недоступна, поэтому фирме следует выбрать самое близкое значение $q = 8$.

2) Найдем функции MR и MC . Они пересекаются в точке $q = 10$, но эта точка недоступна, поэтому фирме следует выбрать самое близкое значение $q = 8$.

Во всех случаях корректная иллюстрация (график функции прибыли или картинка к модели монополии с MR и MC) считается достаточным обоснованием выбора точки $q = 8$, то есть при наличии такой иллюстрации 3 балла не снимаются.

Если участник просто приравнивает MR и MC , просто находит вершину параболы или приравнивает к нулю производную функции прибыли (и получает таким образом ответ $q = 10$), то он получает 3 балла за весь пункт, из которых 1 балл снимается, если он не проверил выполнение достаточного условия (то есть не указал, что ветви параболы направлены вниз, не проверил знак второй производной и не указал, что MR пересекает MC «сверху»). Во всех случаях корректная иллюстрация (нарисованный график функции прибыли или картинка к модели монополии с MR и MC) считается проверкой достаточных условий.

б) Схема проверки аналогична пункту а).

в) В этом пункте участник может просто сделать корректный вывод из своих результатов пункта а). Если получен ошибочный вывод о том, что оптимальный объем равен 12 (то есть что фирма будет производить весь максимальный объем), за пункт ставится 0 баллов.

г) Схема проверки аналогична пунктам а) и б). Если участник в качестве ответа приводит сумму ответов в б) и в) (если у него эти ответы верные, то должно получиться $32 + 2 = 34$), за пункт ставится 0 баллов.

Задача 2. Трудовое законодательство**(30 баллов)**

Градообразующее предприятие является монополистом на внутреннем рынке товара X , а также монополистом на рынке труда специалистов по его производству. Производственная функция имеет вид $Q = L/2$, где L — число нанятых работников. Предложение труда работников задается функцией $w = 3 + L/4$, где w — зарплата. Спрос потребителей на товар X зависит от фазы экономического цикла. Он задается функцией $Q = 90 - P$ во время экономического подъема; во время спада спрос меньше в 5 раз при каждой цене. Монополист планирует свою деятельность на следующие два года: считая, что в ближайший год будет подъем, а в следующий — спад, он определяет оптимальные цены и количество нанятых работников в каждом периоде.

а) (12 баллов) Сколько работников наймет фирма в каждом периоде?

б) (16 баллов) Государство изменило трудовое законодательство, чтобы защитить работников в кризис: монополисту разрешено увольнять не более 50 % работников после окончания первого года. Об этом правиле стало известно заранее, еще до начала первого года. Сколько работников наймет фирма в каждом из периодов?

в) (2 балла) Допустим, благосостояние работников положительно зависит от суммы количеств работающих в первом и втором периоде. Вырастет ли благосостояние работников в результате изменения трудового законодательства, призванного защитить их?

Решение

а) Во время спада функция спроса будет иметь вид $Q = (90 - P)/5 = 18 - P/5$. Обратная функция спроса будет иметь вид $P = 90 - 5Q$. Выпишем прибыль как функцию от количества нанятых работников в период подъема (L_1) и спада (L_2):

$$\begin{aligned} \pi(L_1, L_2) &= TR_1 + TR_2 - w(L_1) \cdot L_1 - w(L_2) \cdot L_2 = \\ &= (90 - Q_1) \cdot Q_1 + (90 - 5Q_2) \cdot Q_2 - (3 + L_1/4) \cdot L_1 - (3 + L_2/4) \cdot L_2 = \\ &= (90 - L_1/2) \cdot L_1/2 + (90 - 5L_2/2) \cdot L_2/2 - (3 + L_1/4) \cdot L_1 - (3 + L_2/4) \cdot L_2 = \\ &= (42L_1 - L_1^2/2) + (42L_2 - 3L_2^2/2). \end{aligned}$$

Как видим, прибыль является суммой двух не зависящих друг от друга слагаемых, и поэтому каждое из них можно оптимизировать по отдельности. Каждое из них задает параболу с ветвями вниз относительно своей переменной, откуда $L_1^* = \frac{42}{2/2} = 42$, $L_2^* = \frac{42}{2 \cdot 3/2} = 14$.

Ответ можно найти и с помощью выписывания стандартных условий $MRP_L = MC_L$ для каждого периода:

Первый период

$$MR = 90 - 2Q = 90 - L$$

$$MP_L = 1/2$$

$$MRP_L = MR \cdot MP_L = (90 - L) \cdot 1/2$$

$$TC(L) = (3 + L/4) \cdot L$$

$$MC_L = 3 + L/2$$

$$MRP_L = MC_L$$

$$(90 - L) \cdot 1/2 = 3 + L/2$$

$$L = 42$$

Второй период

$$MR = 90 - 10Q = 90 - 5L$$

$$MP_L = 1/2$$

$$MRP_L = MR \cdot MP_L = (90 - 5L) \cdot 1/2$$

$$TC(L) = (3 + L/4) \cdot L$$

$$MC_L = 3 + L/2$$

$$MRP_L = MC_L$$

$$(90 - 5L) \cdot 1/2 = 3 + L/2$$

$$L = 14$$

Функции MRP_L убывают, а MC_L возрастают, так что найденные точки являются точками максимума.

Еще один способ — взять производную функции прибыли по обоим переменным: $\pi'_{L_1} = 42 - L_1 = 0$, откуда $L_1^* = 42$; $\pi'_{L_2} = 42 - 3L_2 = 0$, откуда $L_2^* = 14$. Эти точки являются точками максимума, так как производные меняют знак с плюса на минус (вариант: вторая производная, равная (-1) в период подъема и (-3) в период спада, отрицательна).

Кроме того, с таким же успехом можно было оптимизировать прибыль по Q , P или w . В каждом из случаев функция является суммой двух квадратичных парабол.

б) В этом пункте нам нужно найти максимум той же функции $\pi(L_1, L_2)$, которую мы нашли выше, но при ограничении $L_2 \geq 0,5L_1$.

Легко убедиться, что самая лучшая для фирмы точка $(42, 14)$ этому условию не удовлетворяет. Поскольку функция прибыли, будучи суммой двух квадратичных функций, убывает при движении в любом направлении от точки глобального максимума $(42, 14)$, максимум этой функции при ограничении $L_2 \geq 0,5L_1$ достигается на границе допустимого множества, то есть когда ограничение выполняется как равенство¹. При этом условии

$$\pi(L_1, L_2) = \pi(L_1, 0,5L_1) = 42L_1 - L_1^2/2 + 42L_1/2 - 3(L_1/2)^2/2 = 63L_1 - 7L_1^2/8.$$

Полученная функция одной переменной является квадратичной, ветви параболы направлены вниз. Поэтому оптимальным является $L_1^* = \frac{63}{7/4} = \frac{7 \cdot 9}{7/4} = 36$. Тогда $L_2^* = 0,5L_1 = 18$.

Максимум снова можно найти с помощью производной. $\pi' = 63 - 7L_1/4 = 0$, откуда $L_1^* = 36$. Это точка максимума, так как производная меняет знак с плюса на минус (вариант: вторая производная $(-7/4)$ отрицательна).

¹Чтобы осознать это, представьте, что вы совершаете восхождение на гору, по склону которой проходит государственная граница, которую вы не можете перейти. В таком случае, если вы хотите забраться как можно выше, но на вершину попасть не можете, вам нужно закончить свой путь где-то на границе.

Также можно было выписать прибыль как функцию от L_2 .

в) В пункте а) суммарная занятость за два периода равна $42 + 14 = 56$, а в пункте б) $36 + 18 = 54 < 56$. Таким образом, благосостояние работников упало.

Примечание 1. Экономический смысл произошедшего заключается в том, что, предвидя сложности с увольнением, монополист изначально наймет меньше работников, что и уменьшит их благосостояние.

Примечание 2. В данной задаче спрос уменьшается в несколько раз при каждой цене. Возможно ли падение благосостояния работников в результате запрета на увольнение более чем доли α сотрудников, если спрос во время кризиса сдвигается параллельно вниз? (Считайте, что спрос на товар, предложение труда и производственная функция являются линейными функциями.)

Схема проверки

а) 1 балл снимается за арифметическую ошибку, не приведшую к качественному изменению результата.

2 балла снимается за отсутствие проверки достаточного условия максимума (отсутствует указание на направление ветвей параболы, смену знака производной или знак второй производной).

б) 1 балл снимается за арифметическую ошибку, не приведшую к качественному изменению результата.

2 балла снимается за отсутствие проверки достаточного условия максимума (отсутствует указание на направление ветвей параболы, смену знака производной или знак второй производной).

3 балла снимается за отсутствие проверки того, что старый оптимум $(L_1, L_2) = (42, 14)$ недостижим при новом ограничении. Если бы он был достижим, новый оптимум совпал бы с ним. При этом не нужно снимать баллы, если участник отдельно не объясняет, почему решение должно лежать именно на границе допустимого множества, а принимает это как данность.

в) Если хотя бы одно из сравниваемых значений неверно или отсутствует, за пункт ставится 0 баллов.

Задача 3. Динамика безработицы (10-11) (30 баллов)

Все население страны делится на три группы: безработные (U), занятые (E) и выбывшие из рабочей силы² (V). Известно, что в отсутствие шоков совокупного спроса и предложения каждый год 10 % от всех выбывших переходят в рабочую силу и сразу же находят работу. Также каждый год 5 % занятых становятся безработными, 25 % безработных находят работу, а 20 % безработных выбывают из рабочей силы. Занятые не выбывают из рабочей силы напрямую. Численность населения неизменна и положительна.

а) (15 баллов) Определите естественный уровень безработицы u^* , то есть такой, при котором достигается долгосрочное равновесие (число занятых, безработных и выбывших не изменяется со временем). Определите также долю экономически активного населения в долгосрочном равновесии.

б) (15 баллов) Из-за кризиса в году Z потеряли работу вдвое больше людей, чем обычно, а также вдвое меньше безработных смогли найти работу. Количество выбывших, перешедших в рабочую силу, не изменилось, но работу смогли найти только половина из них. Определите процентное отклонение фактического ВВП от потенциального в году Z , если в данной стране коэффициент Оукена равен 2. При ответе на данный вопрос учитывайте фактический уровень безработицы на конец года Z .

Решение

а) Пусть ΔX — изменение показателя X . Тогда в долгосрочном равновесии выполняются равенства:

$$\Delta E = 0,25U + 0,1V - 0,05E = 0; \quad (3.1)$$

$$\Delta V = 0,2U - 0,1V = 0; \quad (3.2)$$

$$\Delta U = -0,25U + 0,05E - 0,2U = 0. \quad (3.3)$$

(Достаточно выписать любые два из трех этих уравнений, так как любое из них следует из двух других, поскольку $\Delta E + \Delta U + \Delta V = 0$.)

Уровень безработицы равен $\frac{U}{U+E} \cdot 100\%$, и его удобно найти из уравнения (3.3). Имеем $0,05E = 0,45U$, откуда $E = 9U$ и значит,

$$\frac{U}{U+E} \cdot 100\% = \frac{U}{U+9U} \cdot 100\% = 10\%.$$

Из уравнения (3.2) $V = 2U$, тогда доля экономически активного населения равна

$$\frac{E+U}{E+U+V} = \frac{10U}{12U} = \frac{5}{6}.$$

б) На начало года все величины равны своим долгосрочным равновесным значениям E , U , V . На конец года Z количество безработных U_z будет равно

$$U + 0,05E \cdot 2 - 0,25U/2 - 0,2U + 0,1V/2 = U + 0,9U - 0,125U - 0,2U + 0,1U = 1,675U. \quad (3.4)$$

²Этот термин значит то же, что и «не включаемые в рабочую силу».

Количество занятых на конец года составит

$$E_z = E - 2 \cdot 0,05E + 0,25U/2 + 0,1V/2 = 9U - 0,9U + 0,125U + 0,1U = 8,325U. \quad (3.5)$$

Значит, новый фактический уровень безработицы составит

$$u_z = \frac{U_z}{U_z + E_z} \cdot 100\% = \frac{1,675U}{1,675U + 8,325U} \cdot 100\% = \frac{1,675}{10} \cdot 100\% = 16,75\%.$$

Согласно закону Оукена,

$$\frac{Y_z - Y^*}{Y^*} \cdot 100\% = -\beta \cdot (u_z - u^*),$$

где β — коэффициент Оукена, а $(u_z - u^*)$ — отклонение фактического уровня безработицы на конец года Z от естественного. Тогда

$$\frac{Y_z - Y^*}{Y^*} \cdot 100\% = -2 \cdot (16,75\% - 10\%) = -2 \cdot 6,75\% = -13,5\%.$$

Этот показатель и требовалось найти.

Схема проверки

а) В этом пункте участник должен продемонстрировать:

- Знание макроэкономических понятий, относящихся к рынку труда (занятость, безработица, рабочая сила, выбывшие из рабочей силы, экономически активное население).
- Аккуратность интерпретации данных из условия при использовании их в экономических расчетах.

1) Как следует из решения, для ответов на оба вопроса первого пункта достаточно любых двух уравнений из набора (3.1)—(3.3). Баллы за выписывание этой системы ставятся по следующей схеме:

- (5 баллов) Все три уравнения корректно выписаны.
- (5 баллов) Любые два уравнения корректно выписаны.
- (4 балла) Все три уравнения выписаны, однако в одном содержится ошибка.
- (3 балла) Все три уравнения выписаны, однако в двух содержатся ошибки.
- (2 балла) Два уравнения выписаны, однако в одном содержится ошибка.
- (2 балла) Корректно выписано уравнение (3.3).
- (1 балл) Корректно выписано одно уравнение (3.1) или (3.2).

2) Для поиска уровня безработицы участник должен упростить уравнение (3.3) или систему (3.1)—(3.2), чтобы получить взаимосвязь $E = 9U$ или эквивалентную. Это действие должно принести ему 3 балла. Если допущена арифметическая ошибка в этом действии, то оценка за действие понижается до 2 баллов. Если неправильная взаимосвязь стала результатом использования неправильно полученных ранее уравнений, это действие не оценивается (оценка 0 баллов).

3) Подставляя найденную взаимосвязь в формулу уровня безработицы, участник получает ответ 10 %. Это действие приносит ему еще 2 балла (фактически за знание формулы уровня безработицы). Если участник представляет уровень безработицы в долях, а не в процентах (0,1 вместо 10 %), оценка не изменяется. Если участник использует неверные значения переменных, но верную формулу, баллы ставятся всё равно (за поиск неверных значений участник уже оштрафован раньше), если только значение уровня безработицы не утратило экономического смысл (например, не стало больше 100 %.)

4) Для поиска доли экономически активного населения участник должен упростить ранее выписанную систему уравнений и получить взаимосвязь $V = 2U$ или эквивалентную. Это действие должно принести ему 3 балла. Если допущена арифметическая ошибка в этом действии, то оценка за действие понижается до 2 баллов. Если неправильная взаимосвязь стала результатом использования неправильно полученных ранее уравнений, это действие не оценивается (оценка 0 баллов).

5) Подставляя найденную взаимосвязь в формулу доли экономически активного населения, участник получает ответ $5/6$. Это действие приносит ему еще 2 балла (фактически за знание понятия экономически активное население и его формулы). Если участник задает долю в процентах (83,3 % вместо $5/6$), оценка не изменяется. Если участник использует неверные значения переменных, но верную формулу, баллы ставятся всё равно (за поиск неверных значений участник уже оштрафован раньше).

б) Оценка за этот пункт складывается из трех частей:

1) Корректная интерпретация данных из условия и получение значений U_z и E_z (выражения (3.4) и (3.5)) — по 3 балла за каждое выражение.

2) Подсчет нового уровня безработицы с учетом полученных данных — 4 балла.

3) Подстановка результатов в формулу закона Оукена — 5 баллов (фактически за знание формулы).

Задача 4. Фруктовая страна (10-11) (30 баллов)

Во Фруктовой Стране есть три региона (А, В и С), в каждом из которых выращивают персики (X) и бананы (Y). В каждом из регионов КПВ имеет линейный вид; альтернативные издержки производства персиков положительны, и в регионе А они больше, чем в регионе В, а в регионе В больше, чем в регионе С. Максимально возможное количество произведенных персиков в каждом из регионов одинаково и равно 24 тонны. Максимально возможное производство бананов в стране равно 104 тонны.

Страна потребляет персики и бананы только в пропорции 1:1 и максимизирует потребление фруктов. Известно, что в условиях закрытой экономики каждый из фруктов производился более, чем в одном регионе. На мировом рынке можно обменять 1 тонну персиков на 1 тонну бананов. После того как страна открылась для международной торговли, стране стало безразлично, сколько персиков и бананов производить в одном из регионов (при оптимальных уровнях производства в других регионах).

В результате открытия международной торговли потребление как персиков, так и бананов в стране выросло на $Z > 0$ тонн. Какие значения может принимать Z ?

Для удобства проверки при построении КПВ указывайте количество произведенных персиков *по горизонтали*. Кроме того, если вы будете решать задачу аналитически (что необязательно), обозначьте альтернативные издержки (а. и.) производства персиков в регионах за a , b и c , $a > b > c > 0$.

Решение

Всю задачу можно решить двумя способами — либо с помощью геометрических соображений, не вводя уравнения КПВ регионов в общем виде аналитически, либо вводя эти уравнения. В дальнейшем мы будем приводить оба этих способа (конечно, участнику достаточно решить задачу каким-нибудь одним из способов, причем их можно комбинировать, то есть получить какие-то из выводов геометрически, а какие-то — аналитически).

Заметим, что луч $Y = X$ пересекает КПВ страны на «среднем» участке, так как каждый из товаров производится более чем в одном регионе. Тогда из геометрических соображений видно, что точка (48; 48) должна находиться выше КПВ страны. Для дальнейшего решения геометрическим способом этого наблюдения достаточно.

Решая аналитически, получаем, что уравнения КПВ в трех регионах имеют вид $Y = a(24 - X)$, $Y = b(24 - X)$, $Y = c(24 - X)$. Поскольку КПВ страны является суммой трех линейных КПВ, она вогнута (выпукла вверх, выполняется закон возрастающих а. и.), и значит участок общей КПВ, соответствующий региону А, является самым правым. Тогда уравнение КПВ страны на этом участке имеет вид $Y = a(72 - X)$. Пересечение этой прямой и прямой $Y = X$ должно произойти при $X < 48$. Точка пересечения имеет абсциссу $72a/(a + 1) < 48$, откуда $a < 2$. Это аналитический вариант условия о том, что точка (48; 48) должна находиться выше КПВ страны.

Альтернативные издержки в одном из регионов должны равняться 1, так как стране неважно, сколько каких товаров производить в этом регионе после открытия торговли. Рассмотрим три случая.

а) Допустим, а. и. равны 1 в регионе А.

Способ 1. Поскольку КПВ страны является суммой трех линейных КПВ, она вогнута (выпукла вверх, выполняется закон возрастающих а. и.), и значит участок общей КПВ, соответствующий региону А, является самым правым. Тогда уравнение КПВ страны на этом участке имеет вид $Y = 72 - X$. И снова, поскольку КПВ страны вогнута (выпукла вверх, выполняется закон возрастающих а. и.), вся КПВ лежит под прямой $Y = 72 - X$. В этом случае максимальный объем производства бананов в стране не больше 72, а по условию он равен 104. Противоречие.

Способ 2. Уравнения КПВ в трех регионах имеют вид $Y = a(24 - X)$, $Y = b(24 - X)$, $Y = c(24 - X)$. Тогда максимальное производство бананов равно $24(a + b + c) < 24 \cdot 3a = 72$. По условию же оно равно 104. Противоречие.

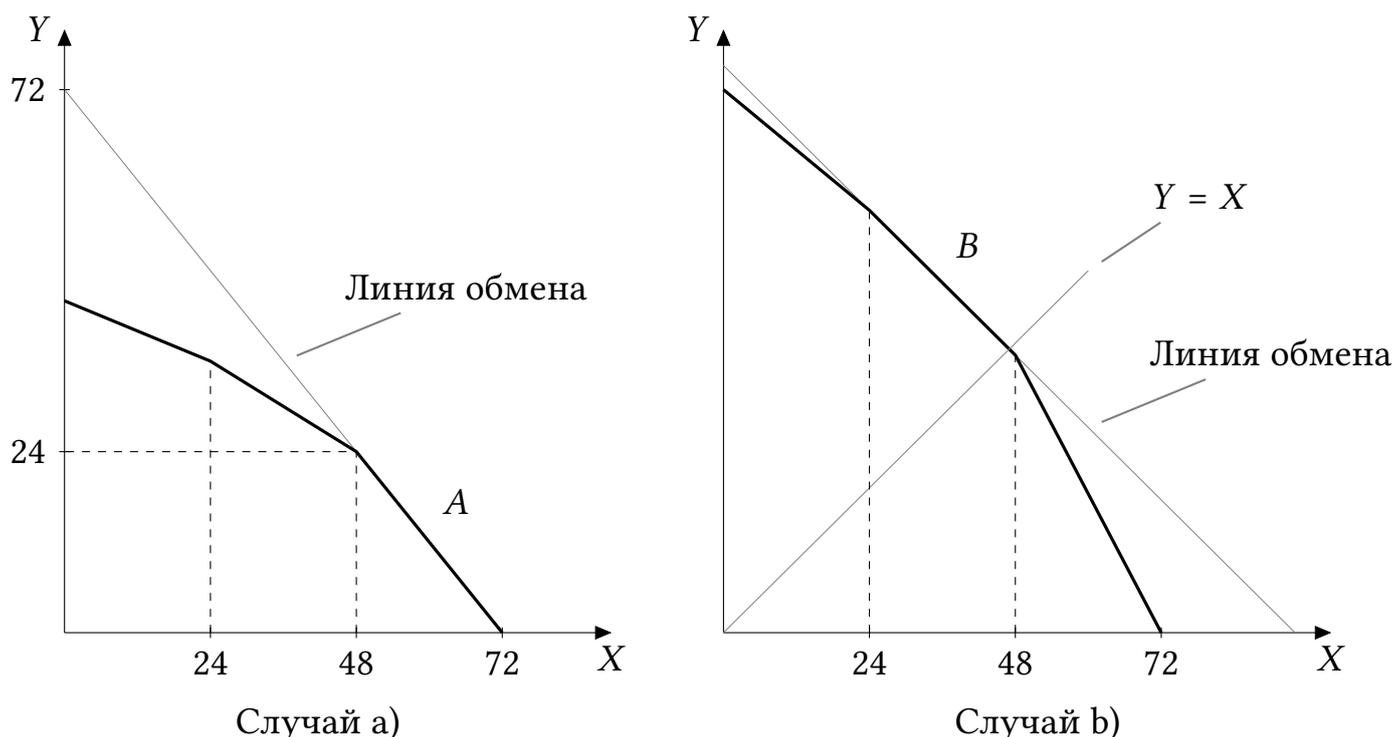


Рис. 4.1: Невозможные случаи.

б) Допустим, а. и. равны 1 в регионе В.

Способ 1. Поскольку участок общей КПВ, соответствующий региону В, является «средним», при открытии международной торговли объемы потребления не изменятся, а по условию $Z > 0$. Противоречие.

Способ 2. Поскольку точка (48; 48) лежит над КПВ и поскольку наклон КПВ на среднем участке равен 1, вся КПВ, в силу своей вогнутости (выпуклости вверх, выполнения закона возрастающих а. и.) должна лежать под прямой $Y = 96 - X$, а значит, максимальное производство бананов в стране меньше 96. По условию же оно равно 104. Противоречие.

Способ 3. Поскольку $b = 1$ и $c < b$, а по выведенному выше $a < 2$, максимальное производство бананов, равное $24(a + b + c)$, меньше $24 \cdot 4 = 96$. По условию же оно равно 104. Противоречие.

с) Значит, а. и. равны 1 в регионе С. Поскольку выполняется закон возрастаю-

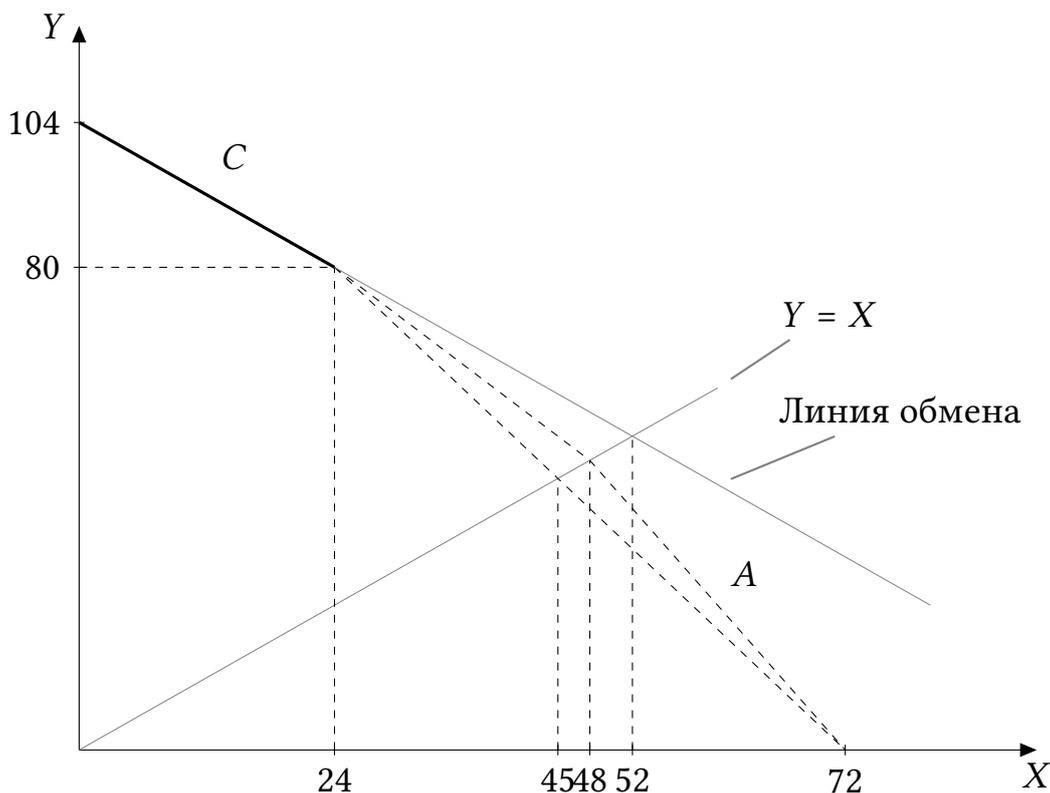


Рис. 4.2: Случай с). КПВ страны может лежать только между пунктирными линиями, откуда и получаем ответ.

щих альтернативных издержек, регион С соответствует верхнему участку КПВ страны. Значит, уравнение КПВ на этом участке имеет вид $Y = 104 - X$. Кроме того, такое уравнение имеет прямая, вдоль которой страна обменивается товарами с другими странами. Значит, объемы потребления после открытия торговли определяются из пересечения прямых $Y = 104 - X$ и $Y = X$, откуда $X = Y = 52$.

Для ответа на вопрос задачи осталось определить, какие значения может принимать потребление фруктов в условиях закрытой экономики.

Заметим, что точка $(24; 80)$ является точкой излома КПВ, а точка $(72; 0)$ лежит на КПВ. Соединим эти точки прямой. Ее уравнение имеет вид $Y = 120 - 5X/3$. Поскольку КПВ вогнута (выпукла вверх, выполняется закон возрастающих а. и.), КПВ не может лежать ниже этой прямой. Значит, объемы потребления в отсутствие торговли не меньше, чем те, что получаются при пересечении прямых $Y = 120 - 5X/3$ и $Y = X$. Эти объемы равны 45.

Наконец, по сказанному выше, точка $(48; 48)$ лежит выше КПВ страны, и поэтому объемы потребления в условиях закрытой экономики меньше 48. Значит, объемы потребления в условиях закрытой экономики лежат в пределах от 45 до 48, не включая границы. Граница 48 не включается, так как в противном случае оказалось бы, что точка $(48; 48)$ лежит на КПВ, а это не так. Граница 45 не включается, так как в противном случае оказалось бы, что альтернативные издержки в регионах А и В одинаковы, а по условию это не так.

Легко убедиться графически, что все промежуточные объемы между 45 и 48 воз-

можны. Отсюда получаем, что выигрыш страны от торговли $Z \in (52-48; 52-45) = (4; 7)$.

Ответ: $Z \in (4; 7)$.

Схема проверки

Схема проверки этой задачи написана в форме классификации некорректностей (недочетов, ошибок, изъянов) в решениях участников. При выставлении оценки нужно руководствоваться соотношением баллов и наборов нарушений, приведенным в таблице ниже. Если в работах участников встречаются некорректности (или продвижения), не описанные в авторских схемах проверки, жюри должно самостоятельно определить их тяжесть (или ценность) и отнести к одному из типов в классификации. В любом случае, оценка за эту задачу должна быть кратна 5 баллам.

Недочеты:

- Н1.** Участник допустил арифметическую ошибку в преобразованиях выражений или расчетах, не упростившую решение и не повлиявшую на ответ существенным образом.
- Н2.** Участник включил нижнюю и/или верхнюю границу на Z в ответ.
- Н3.** Участник в своем решении подразумевал выполнение закона возрастающих альтернативных издержек, но не ссылаясь на него явно.

Ошибки:

- О1.** Участник не рассмотрел один из трех случаев, соответствующих тому, в каком регионе альтернативные издержки равны 1, или привел неправильное объяснение, почему этот случай следует отвергнуть.
- О2.** Участник не сделал вывод о том, что точка $(48; 48)$ лежит над КПВ (в любой эквивалентной формулировке, в том числе $a < 2$), в результате чего не получил нижнюю границу на Z .

Изъяны:

- И1.** Участник не сделал вывод о том, что в одном из регионов наклон КПВ (альтернативные издержки) должен быть равен 1.
- И2.** Участник игнорировал выполнение закона возрастающих альтернативных издержек (например, строил невогнутые КПВ), в результате чего не смог провести правильный отсев случаев и/или получить верхнюю границу на Z в случае с).

Минимальные продвижения:

- П1.** Участник вывел уравнения КПВ регионов аналитически (с параметрами a, b, c).
- П2.** Участник обосновал, что КПВ одного из регионов должна иметь наклон 1.
- П3.** Участник обосновал, что луч $Y = X$ пересекает общую КПВ страны на «среднем» участке последней.

Баллы	Описание
30	Полное верное решение без недочетов
25	Решение верное, но в нем есть недочеты (один или несколько)
20	Решение в целом верное, но в нем есть одна ошибка
15	Решение в целом верное, однако в нем есть одна ошибка и один или несколько недочетов
10	В решении имеется несколько ошибок или один изъян (наличие недочетов не имеет значения)
5	Решение участников в целом неверное (то есть в нем есть больше ошибок и изъянов, чем описано выше), однако в нем есть и минимальные продвижения (одно или несколько)
0	Решение участников неверное, минимальное продвижение отсутствует