

10 класс

10.1. График квадратичной функции $y = ax^2 + c$ пересекает оси координат в вершинах правильного треугольника. Чему равно ac ?

Ответ: -3 .

Решение. Так как график пересекает ось OX в двух точках, то числа a и c имеют разные знаки. Точки пересечения: $A(\sqrt{-\frac{c}{a}}; 0)$; $B(-\sqrt{-\frac{c}{a}}; 0)$. Ось OY график пересекает в точке $C(0; c)$. Тогда сторона AB правильного треугольника равна $2\sqrt{-\frac{c}{a}}$, а его высота равна $|c|$. Так как сторона a и высота h правильного треугольника связаны соотношением $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $|c| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{-\frac{c}{a}}$, откуда $c^2 = -3 \cdot \frac{c}{a}$, поэтому $ac = -3$.

Существуют и другие способы получить равенство, связывающее a и c , например, можно использовать, что $AB = AC$.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, рассматривается только $c > 0$)*

« \mp » *Верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

« $\bar{\mp}$ » *Приведен только верный ответ*

«-» *Задача не решена или решена неверно*

10.2. На доске записано число 2018. Игорь дописывает в конец этого числа такую цифру, чтобы получившееся число было кратно 11, и делит его на 11. Затем он дописывает подходящую цифру в конец полученного результата и делит его на 11, и так далее. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Ответ: не может.

Решение. Первый способ. Докажем, что после каждого шага многозначное число на доске будет уменьшаться. Действительно, рассмотрим число $n \geq 10$ и допишем в его конец цифру a . Получим число $10n + a < 11n$, так как $n \geq 10 > a$. Разделив его на 11, получим число, которое меньше, чем n .

Докажем теперь, что в результате описанной операции из многозначного числа невозможно получить однозначное. Действительно, если $n \geq 10$, то $10n + a \geq 100 + a > 99$. Тогда, если $10n + a$ делится на 11, то после деления будет получено число, которое больше, чем 9.

Так как 2018 – многозначное число, то оно будет после каждого шага уменьшаться, но никогда не станет однозначным, поэтому описанный процесс не может продолжаться бесконечно.

Отметим, что если изначально будет задано однозначное число p , до дописывая к нему каждый раз ту же цифру p , можно сделать процесс бесконечным.

Второй способ. Заметим, что в каждом десятке не более одного числа, делящегося на 11, поэтому можно однозначно восстановить последовательность чисел, которые будут получаться у Игоря: 2018, 20185, 1835, 18359, 1669, 16698, 1518, 15180, 1380, 13805, 1255, 12551, 1141, 11418, 1038, 10384, 944, 9449, 859, 8591, 781, 7810, 710, 7106, 646, 6468, 588, 5885, 535, 5357, 487, 4873, 443, 4433, 403, 4037, 367, 3674, 334, 3344, 304, 3047, 277, 2772, 252.

К числу 252 невозможно дописать цифру так, чтобы полученное число делилось на 11, так как на 11 делятся числа 2519 и 2530. Следовательно, на числе 252 процесс остановится.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, при первом способе решения доказано, что многозначное число уменьшается и указано, но не доказано, что нельзя получить однозначное, либо, наоборот, вторая часть доказана, а первая только указана)

«±» Верно выписана последовательность получаемых чисел от 2018 до 252 без каких-либо комментариев при втором способе решения

«∓» Приведен верный ответ и сформулированы, но не доказаны утверждения, из которых он следует

«∓» При выписывании последовательности чисел допущена одна вычислительная ошибка (второй способ)

«-» Приведен только ответ

«-» Задача не решена или решена неверно

10.3. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Биссектрисы углов BAC и ACP пересекаются в точке M , а биссектриса угла PBA и прямая, содержащая биссектрису угла BPC пересекаются в точке N . Докажите, что точка пересечения прямых CP и AB лежит на прямой MN .

Решение: Пусть прямые CP и AB пересекаются в точке K (см. рис. 10.3). Тогда M – точка пересечения биссектрис треугольника AKC , следовательно, KM – биссектриса угла AKC .

Рассмотрим теперь треугольник KBP . N – точка пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине B и биссектрисы внешнего угла при вершине P . Следовательно, точка N лежит и на биссектрисе внешнего угла при вершине K , то есть на биссектрисе угла AKC (N – центр вневписанной окружности треугольника KBP).

Таким образом, точки K , M и N лежат на прямой, содержащей биссектрису угла AKC .

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности

«∓» Обосновано, что KM – биссектриса угла AKC , но дальнейших продвижений нет

«-» Рассмотрен только какой-то частный случай

«-» Задача не решена или решена неверно

10.4. Квадрат со стороной 7 клеток полностью замостили трёхклеточными «уголками» и пятиклеточными «плюсиками» (см. рисунок). Какое наибольшее количество «плюсиков» могло быть

использовано?

Ответ: 5.

Решение. Пусть для указанного замощения использовано x «уголков» и y «плюсиков», тогда $3x + 5y = 49$.

Заметим, что угловые клетки доски могут быть покрыты только «уголками», поэтому «уголков» должно быть не меньше четырёх. Но при $x = 4; 5; 6; 7$; значения y не будут целыми.

Если $x = 8$, то $y = 5$. При дальнейшем увеличении значения x значения y будут меньше пяти. Следовательно, 5 – это наибольшее возможное значение y . Пример замощения доски восемью «уголками» и пятью «плюсиками» – см. рис. 10.4.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности

Рис. 10.3

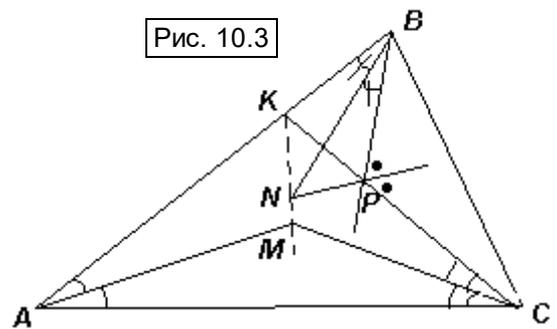
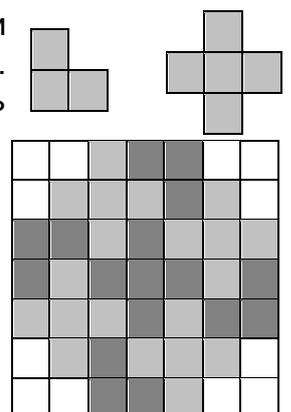


Рис. 10.4



«±» Обоснованно получен верный ответ, но пример отсутствует или содержит ошибку

«∓» Приведены только верный ответ и пример

«-» Приведен только ответ

«-» Задача не решена или решена неверно

10.5. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел, удовлетворяющие условиям: $x^3 + y^3 = 1$ и $x^4 + y^4 = 1$.

Ответ: $(0; 1); (1; 0)$.

Решение. Первый способ. Из второго равенства следует, что $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. При этом, для того, чтобы выполнялось первое равенство, необходимо, чтобы хотя бы одно из чисел x или y было положительным. Так как оба равенства симметричны относительно переменных, то пусть $0 < x \leq 1$. Тогда $0 < x^3 \leq 1$, откуда $0 \leq 1 - x^3 < 1$, то есть $0 \leq y^3 < 1$, значит, $0 \leq y < 1$.

Так как $0 < x \leq 1$ и $0 \leq y < 1$, то $x^4 \leq x^3$ и $y^4 \leq y^3$, причем оба равенства одновременно достигаются только при $x = 1$ и $y = 0$. Учитывая симметричное решение $x = 0; y = 1$, получим ответ.

Второй способ. Из условия задачи следует, что $x^4 - x^3 = -(y^4 - y^3)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - t^3$, тогда уравнение примет вид $f(x) = -f(y)$.

Так как $t^4 - t^3 = t^3(t-1)$, то при $t < 0$ или $t > 1$ $f(t) > 0$, а при $0 < t < 1$ $f(t) < 0$. Следовательно, если $x < 0$ или $x > 1$, то $0 < y < 1$. Если $x > 1$, то $x^4 > 1$ и $x^4 + y^4 > 1$. Если $x < 0$, то $x^3 < 0$, а так как $0 < y < 1$, то $0 < y^3 < 1$, тогда $x^3 + y^3 < 1$. В обоих случаях получено противоречие. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в случае, когда $0 < x < 1, y < 0$ или $y > 1$.

Следовательно, $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ или $t = 1$. Подставив эти значения в исходные равенства вместо любой из переменных, получим ответ.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, не учтен симметричный ответ)

«∓» Присутствуют верные идеи оценки значений переменных, но до конца решение не доведено

«-» Приведен только ответ

«-» Задача не решена или решена неверно

10.6. Стороны основания кирпича равны 28 см и 9 см, а высота 6 см. Улитка ползёт прямолинейно по граням кирпича из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Горизонтальная и вертикальная составляющие ее скорости v_x и v_y , связаны соотношением $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ (например, на верхней грани $v_y = 0$ см/мин, поэтому $v_x = v = 1$ см/мин). Какое наименьшее время может затратить улитка на своё путешествие?

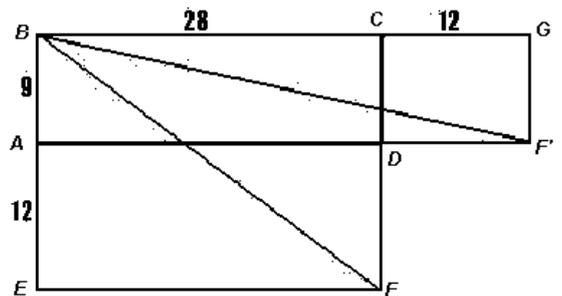
Ответ: 35 мин.

Рис. 10.6а

Решение. Пусть данный кирпич – это прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$, в котором $AB = 9$ см, $BC = 28$ см, $AA' = 6$ см.

Первый способ. Увеличим высоту кирпича и вертикальную составляющую скорости улитки в два раза. Получим кирпич $ABCDEFGH$, на котором скорость улитки будет всегда одна и та же:

$v = \sqrt{v_x^2 + (2v_y)^2} = 1$ см/мин, а наименьшее время движения такое же, как по исходному кирпичу.



Пусть улитка ползет из вершины B в вершину F . Рассмотрим развёртку трех граней этого кирпича: основания $ABCD$ и двух смежных вертикальных граней с общим ребром DF . Так как скорость улитки постоянная, то наименьшее время будет при наименьшей длине пути, то есть при движении по диагонали одного из двух прямоугольников: $BCFE$ или $ABGF$ (см. рис. 10.6а). По теореме Пифагора получим, что $BF = 35$ см; $BF = 41$ см. Значит, выгоднее двигаться по диагонали BF , тогда при скорости 1 см/мин наименьшее время составит 35 минут.

Второй способ. Заметим, что 6 см по вертикали улитка в любом случае должна проползти, поэтому можно считать, что она равномерно ползла из вершины D в вершину B' и уже доползла до верхней грани кирпича. При этом, она оказалась в одной из точек A_1 или A_2 на расстоянии a от вершины D' (см. рис. 10.6б).

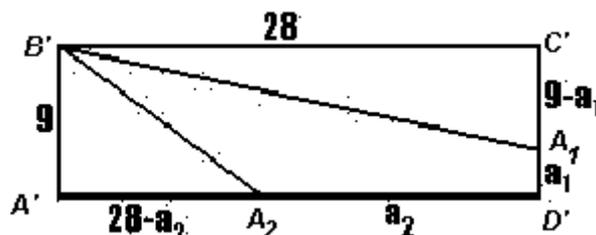


Рис. 10.6б

Пусть она затратила на этот путь t минут, тогда умножив обе части равенства $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ на t^2 , получим: $t^2v_x^2 + 4t^2v_y^2 = t^2$. В этом случае, $a = tv_x$ и $6 = tv_y$, поэтому $a^2 + 4 \cdot 36 = t^2$, откуда $t = \sqrt{a^2 + 144}$.

Рассмотрим два возможных маршрута по верхней грани: $A_1B' = \sqrt{28^2 + (9 - a_1)^2}$ или $A_2B' = \sqrt{9^2 + (28 - a_2)^2}$. Скорость ее движения по верхней грани равна 1 см/мин, поэтому время численно равно длине пройденного пути. Найдём значения a , для которых функции $f_1(a) = \sqrt{a^2 + 144} + \sqrt{28^2 + (9 - a)^2}$ и $f_2(a) = \sqrt{a^2 + 144} + \sqrt{9^2 + (28 - a)^2}$ принимают наименьшие значения.

Для первой функции геометрической интерпретацией является сумма расстояний на координатной плоскости между точками $(0; 0)$ и $(12; a)$ и между точками $(12; a)$ и $(40; 9)$. Такая сумма принимает наименьшее значение, если точка $(12; a)$ лежит на отрезке с концами в двух других точках. Следовательно, $\frac{40}{12} = \frac{9}{a}$, то есть $a_1 = 2,7$,

$$f_1(2,7) = \sqrt{2,7^2 + 144} + \sqrt{28^2 + 6,3^2} = 12,3 + 28,7 = 41.$$

Для второй функции геометрической интерпретацией является сумма расстояний между точками $(0; 0)$ и $(12; a)$ и между точками $(12; a)$ и $(21; 28)$. Рассуждая аналогично, получим: $\frac{21}{12} = \frac{28}{a}$, тогда $a_2 = 16$, $f_2(16) = \sqrt{16^2 + 144} + \sqrt{9^2 + 12^2} = 20 + 15 = 35$.

Следовательно, наименьшее время движения – 35 минут.

Школьники, уже умеющие вычислять производные функций, могут в заключительной части решения действовать иначе.

Найдём производные полученных функций: $f_1'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 144}} + \frac{a - 9}{\sqrt{28^2 + (9 - a)^2}}$ и

$$f_2'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 144}} + \frac{a - 28}{\sqrt{9^2 + (28 - a)^2}}. \text{ Нули производных: } a_1 = 2,7; \quad a_2 = 16. \text{ Поскольку}$$

производные левее этих значений a принимают отрицательные значения, а правее – положительные, то эти точки являются единственными точками минимума функций. В силу непрерывности каждой из функций на своей области определения, в этих точках и будут достигаться их наименьшие значения. Эти значения:

$$f_1(2,7) = \sqrt{2,7^2 + 144} + \sqrt{28^2 + 6,3^2} = 12,3 + 28,7 = 41 \text{ и } f_2(16) = \sqrt{16^2 + 144} + \sqrt{9^2 + 12^2} = 20 + 15 = 35.$$

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

- «±» Верный ответ обоснованно получен, исходя из рассмотрения только одного варианта движения*
- «∓» Обоснованно получен ответ 41 минута*
- «⊖» Обоснованно получены функции времени, но дальнейших продвижений нет или они содержат ошибки*
- «→» Приведен только ответ*
- «←» Задача не решена или решена неверно*