

Задание 11.1. Критическая длина и скорость звука в пластмассовой планке.

Теоретическое введение.

Если отклонить в поперечном направлении свободный конец вертикально закрепленной с одного конца упругой планки (рис. 1) и отпустить, то возникнут свободные поперечные колебания планки вблизи её вертикального положения. Однако, как несложно убедиться экспериментально, такие колебания возникают только в том случае, если длина l свободного, направленного вверх, конца планки не превышает некоторую критическую длину $l_{кр}$. В этом случае вертикальное положение планки устойчиво и при небольшом отклонении она возвращается в исходное равновесное положение. Если же $l > l_{кр}$, то вертикальное положение планки становится неустойчивым и при небольшом поперечном воздействии равновесие планки нарушается, и она заваливается, сильно изогнувшись под действием собственного веса. При $l = l_{кр}$ вертикальное положение планки соответствует безразличному равновесию.

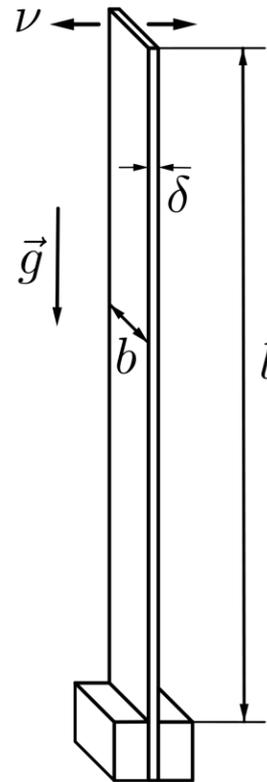


Рис. 1

Критическая длина $l_{кр}$, при которой планка теряет устойчивость, определяется плотностью ρ материала планки, его модулем Юнга E и геометрическими размерами свободного конца планки - шириной b и толщиной δ , а также ускорением свободного падения g . Для куба критической длины тонкой ($\delta \ll b$) линейки справедлива формула:

$$l_{кр}^3 = \alpha E^m \rho^n b^p \delta^q g^u, \tag{1}$$

где m, n, p, u – некоторые целые числа, $\alpha \approx 2/3$ – безразмерный коэффициент, $q = 2$.

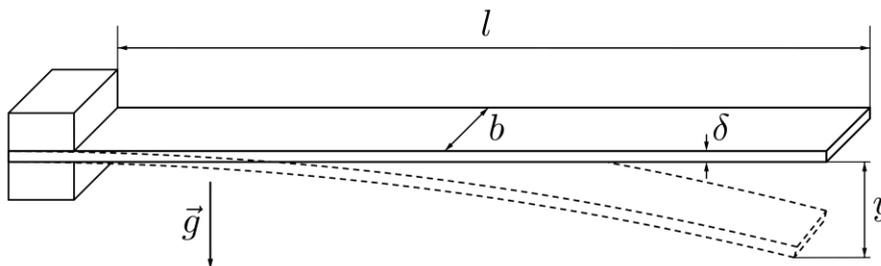


Рис. 2

Таковыми же параметрами определяется прогиб горизонтально закреплённой планки под влиянием собственного веса (рис. 2). Так, максимальное смещение y у конца тонкой планки длиной l (так называемая стрела прогиба) можно определить по формуле:

$$y = \beta E^k \rho^r b^s \delta^t g^h l^f, \tag{2}$$

где k, r, s, h, f – некоторые **целые** числа, $\beta = 3/2$ – безразмерный коэффициент, $t = -2$.

Отметим, что формула (2) справедлива при условии малости прогиба y ($y < 0,5\ell$).

Как правило, *непосредственно* измерить критическую длину $\ell_{кр}$ весьма сложно: вблизи критической длины из-за множества случайных факторов, таких как небольшое отклонение от вертикали, неровности, неоднородность материала, планка ведёт себя совершенно непредсказуемо. Точность такого опыта будет невелика. Более точно критическую длину можно определить путём экстраполяции какой-либо величины, зависящей от длины планки, в критическую область. Такой величиной, в частности, является период T (частота $\nu = 1/T$) поперечных колебаний свободного конца планки. Несложно догадаться, какой период (частота) соответствует критической длине. Это позволяет путём линейной экстраполяции зависимости $\nu(\ell)$ в критическую область достаточно точно определить $\ell_{кр}$. (Кстати, именно таким способом определяются, в частности, температуры различных фазовых переходов: при этом исследуются свойства вещества *вблизи* температуры фазового перехода, а сама температура определяется путём экстраполяции).

В заключение напомним, что модуль Юнга – одна из важных характеристик, определяющая упругие свойства изотропного материала. По закону Гука относительная деформация ε стержня под действием силы F , приложенной перпендикулярно плоскости его поперечного сечения площадью S , равна: $\varepsilon = \Delta\ell/\ell = F/ES$.

Модуль Юнга входит в формулу для скорости звука в различных материалах. Если по торцу тонкого стержня ударить молотком, то по стержню побежит звуковая волна со скоростью $c_{зв} = (E/\rho)^{1/2}$. Для стали с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7,9$ г/см³ эта скорость равна $c_{зв} = (E/\rho)^{1/2} \approx 5$ км/с.

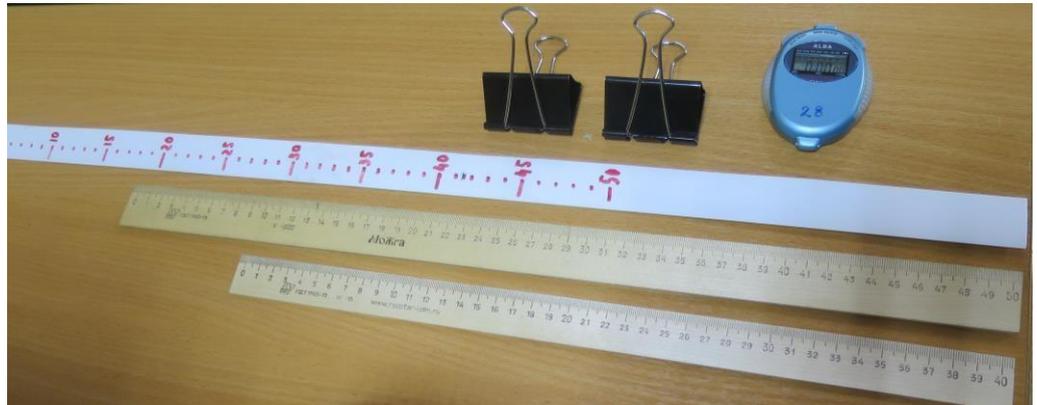
Цель работы.

В данной работе экспериментально определяется критическая длина тонкой ($\delta \ll b$) пластиковой планки. По величине критической длины определяется скорость звука в пластике, из которого изготовлена планка. В работе потребуются:

- руководствуясь общефизическими соображениями, экспериментальными результатами и методом размерностей определить показатели степеней в формулах (1) и (2);
- экспериментально определить численное значение критической длины $\ell_{кр}$ двумя способами:
 - 1) по периоду колебаний вертикально закреплённой планки;
 - 2) по стреле прогиба горизонтально закреплённой планки;
- используя экспериментальные результаты, определить скорость звука в материале (пластике), из которого изготовлена планка.

Оборудование

Пластиковая планка толщиной $\delta = 0,7$ мм; секундомер; деревянная линейка длиной 50 см; прижимная планка, портняжный метр; две канцелярские клипсы (48 мм); миллиметровая бумага формата А4 (2 листа); чистый лист бумаги формата А4. Ножницы выдаются по требованию.



Задание

1. С помощью чистого листа А4 исследуйте зависимость $y \sim bs$ (напомним, что s – целое число). Приведите рисунок, поясняющий, как вы проводите данную часть эксперимента.
2. Руководствуясь экспериментальными результатами и методом размерностей определите показатели степеней в формулах (1) и (2).

Примечание 1: при малых деформациях планки $y \sim F$, где F – сила, приложенная к планке.

Примечание 2: в формулах (1) и (2) параметр b входит в одной и той же степени.

3. Путём непосредственного измерения сделайте оценку $\ell_{кр}$.
4. Снимите экспериментальную зависимость периода T свободных колебаний от длины ℓ свободного конца вертикально закреплённой планки $T(\ell)$ (свободный конец планки направлен вверх). Для каждого значения ℓ сделайте как минимум 2 измерения, при этом общее время колебаний в пределах одного опыта не должно быть меньше 5-10 секунд. Измерения проведите для $\ell \geq (0,6 - 0,7)\ell_{кр}$.
5. Постройте график зависимости частоты колебаний ν от длины ℓ колеблющейся части планки $\nu(\ell)$.
6. Проведите через нанесенные точки наилучшую прямую и путем линейной экстраполяции определите $\ell_{кр}$.
7. По значению $\ell_{кр}$, полученной в П.6, определите скорость звука $c_{звI}$ в материале планки.
8. Снимите зависимость стрелы прогиба y от длины свободного конца ℓ горизонтально закреплённой планки $y(\ell)$. Измерения проводите в таком диапазоне, для которого $y < 0,5\ell$.
9. Выразите y через $\ell_{кр}$ и ℓ . Запишите полученную формулу $y = y(\ell_{кр}, \ell)$.
10. По результатам измерений в П.8 постройте график в подходящих координатах и из него определите $\ell_{кр}$. Сравните полученное значение со значением $\ell_{кр}$, полученным методом колебаний (П.6).
11. По значению $\ell_{кр}$, полученному в П.10, определите скорость звука $c_{звII}$ в материале планки.
12. Сравните значения $c_{звI}$ и $c_{звII}$. Сделайте выводы.

Возможное решение (Гуденко А.).

1. На чистом листе бумаги делаем разрезы, которые делят его на полоски разной ширины (рис. 5). Убеждаемся, что в пределах погрешности (связанной с неоднородностью бумаги) стрела прогиба не зависит от ширины полосок, следовательно, $s = p = 0$.

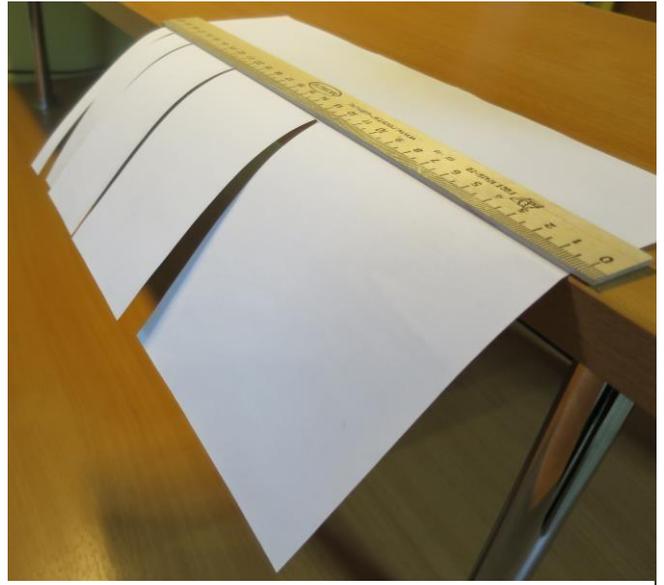


Рисунок 5.

2. Так как $y \sim F$, а $F \sim g$, то $h = 1$. Тогда, руководствуясь соображениями размерности, получаем:

$$\ell_{кр}^3 = 2E\delta^2/3\rho g, \quad (3)$$

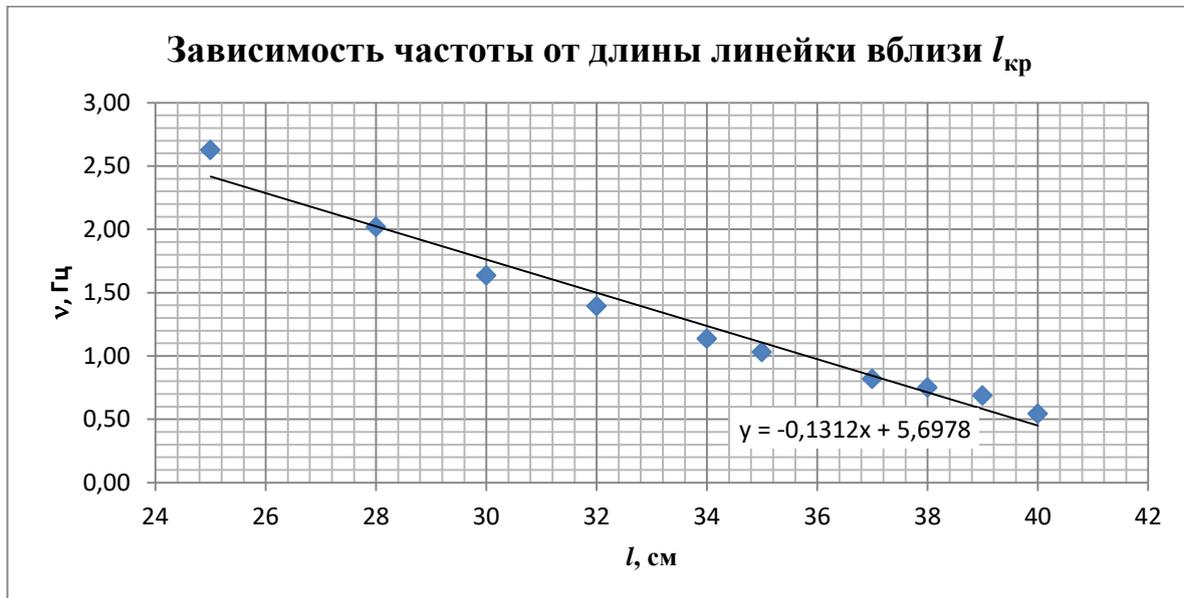
$$y = 3\rho g\ell^4/2E\delta^2. \quad (4)$$

3. Непосредственное измерение даёт $\ell_{кр} \cong 45-50$ см.

4. Снимаем зависимость $T(\ell)$.

ℓ , см	25	28	30	32	34	35	37	38	39	40
T , с	0,38	0,5	0,61	0,72	0,88	0,97	1,22	1,33	1,46	1,84
ν , Гц	2,62	2,02	1,63	1,39	1,13	1,03	0,82	0,75	0,69	0,54

5. Строим график $\nu(\ell)$.



6. Проводим через экспериментальные точки наилучшую прямую. Критическую длину определяем, экстраполируя зависимость $\nu(\ell)$ до пересечения с осью абсцисс (ℓ), т.е. в значение $\nu = 0$. (Очевидно, что при $\ell = \ell_{кр}$ из-за отсутствия возвращающей силы период $T \rightarrow \infty$ и, соответственно, $\nu \rightarrow 0$). Из графика: $\ell_{кр} = (44 \pm 1)$ см.

7. Из теоретического введения и (3): $\ell_{кр}^3 = 2E\delta^2/3\rho g = 2c_{зв}^2\delta^2/3g$.

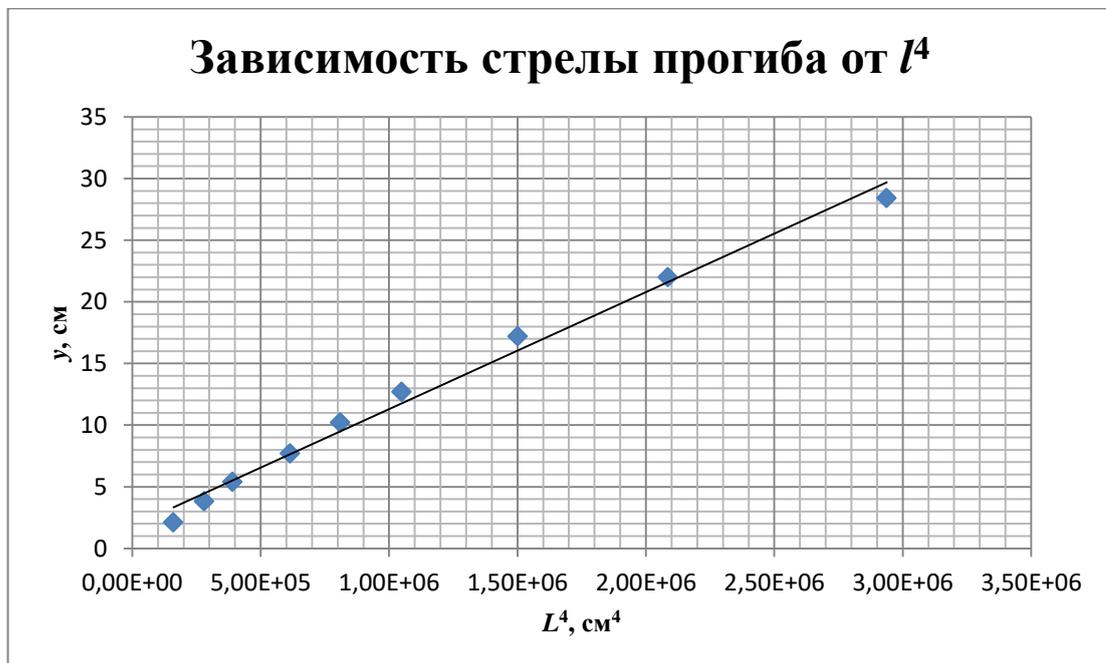
Скорость звука $c_{звI} = (3g\ell_{кр}^3/2\delta^2)^{1/2} \approx 1,60$ км/с.

8. Снимаем зависимость $y = y(\ell)$.

ℓ , см	ℓ^4 , см ⁴	y , см
20	$1,60 \cdot 10^5$	2,1
23	$2,80 \cdot 10^5$	3,8
25	$3,91 \cdot 10^5$	5,4
28	$6,15 \cdot 10^5$	7,7
30	$8,10 \cdot 10^5$	10,2
32	$10,5 \cdot 10^5$	12,7
35	$15,0 \cdot 10^5$	17,2
38	$20,9 \cdot 10^5$	22
41,4	$29,4 \cdot 10^5$	28,4

9. Из теоретического введения и (4): $y = 3\rho g\ell^4/2E\delta^2 = 3g\ell^4/2c_{зв}^2\delta^2$. Учитывая, что $\ell_{кр}^3 = 2c_{зв}^2\delta^2/3g$, получаем: $y = y(\ell_{кр}, \ell) = \ell^4/\ell_{кр}^3$.

10. В координатах (y, ℓ^4) график зависимости $y(\ell)$ – прямая линия с угловым коэффициентом $A = 1/\ell_{кр}^3$. Строим линеаризованный график $y(\ell^4)$.



Точки хорошо ложатся на прямую y (см) = $A\ell^4 = (1,116 \cdot 10^{-5}) \ell^4$ (см) $\rightarrow \ell_{кр} = (1/A)^{1/3} \approx 44,8$ см.

Этот результат в пределах погрешности совпадает с величиной $\ell_{кр} = 44$ см, полученной методом колебаний.

11. $c_{звII} = (3g\ell_{кр}^3/2\delta^2)^{1/2} \approx 1,64$ км/с.

12. Различие $c_{звI}$ и $c_{звII}$ составляет $\Delta c/c \approx 3\%$. Это означает, что в пределах погрешности

Региональный этап всероссийской олимпиады школьников по физике. 19 января 2017 г.
результаты «метода колебаний» и «метода стрелы прогиба» согласуются.

Критерии оценивания

1.	Исследована зависимость $y(b)$ и установлено что $s = p = 0$	1 балл
2.	Определены показатели степеней в формулах (1) и (2)	2 балла
3.	Проведено непосредственное измерение $\ell_{кр}$	0,5 балла
4.	Снята зависимость $T(\ell)$	2 балла
	Снято 10 и более точек	2 балла
	Снято 6 – 9 точек	1 балл
	Если точек меньше 6	0 баллов
5.	Построен график $v(\ell)$.	1,5 балла
6.	Нахождение $\ell_{кр}$:	1 балл
	Через экспериментальные точки проведена «наилучшая» прямая	0,5 балла
	найдена $\ell_{кр}$	0,5 балла
7.	Найдена скорость звука $c_{звI}$	1 балл
	Отклонение от «эталоны» не более 12% (1,40 км/с – 1,80 км/с)	1 балл
	Отклонение от «эталоны» не более 25% (1,20 км/с – 2,00 км/с)	0,5 балла
8.	Снята зависимость $y = y(\ell)$	1,5 балла
	Снято 10 и более точек	1,5 балла
	Снято 6 – 9 точек	1 балл
	Если точек меньше 6	0,5 балла
9.	Получено соотношение $y = y(\ell_{кр}, \ell) = \ell^4 / \ell_{кр}^3$	1,5 балла
10.	График $y(\ell)$, построенный в координатах осей (y, ℓ^4) – прямая линия	1,5 балла
11.	Найдена $\ell_{кр}$	0,5 балла
12.	Найдена скорость звука $c_{звII}$ (1,44 км/с – 1,84 км/с)	0,5 балла
13.	Показано, что в пределах погрешности (оцененной любым разумным способом) результаты «метода колебаний» и «метода стрелы прогиба» согласуются.	0,5 балла

Задание 11.2. Черная звезда. В черном ящике с четырьмя выводами находятся четыре элемента, соединенные звездой. В каждом луче звезды содержится только один элемент. Этими элементами могут быть: резисторы, диоды, конденсаторы, катушки индуктивности, батарейки.

- 1) Определите, какие элементы находятся в лучах звезды, и, в случае обнаружения резисторов, определите их сопротивления.
- 2) Определите внутреннее сопротивление мультиметра в режиме вольтметра (диапазон 20 В)
- 3) Определите напряжение на выходе мультиметра, включенного в режиме омметра в диапазоне 2000 кОм.

Приборы и оборудование: черный ящик, мультиметр.

Внимание! Отклеивать наклейки с черного ящика категорически запрещается!

Возможное решение (Замятнин М., Слободянин В.)

1. Мультиметром в режиме вольтметра проверяем попарно все выводы и убеждаемся в отсутствии источников напряжения.

Измеряем омметром (в режиме 2000 к) сопротивления между выводами и заносим результаты в таблицу.

Контрольные данные.

Контрольные данные. 1. (ЯЦИК 53)

		«Плюсовый» контакт на ножку №			
		1	2	3	4
«Минусовый» контакт на ножку №	1		$\approx \infty$	$\approx \infty$	$\approx \infty$
	2	$\approx \infty$		833 кОм	1092 кОм
	3	$\approx \infty$	833 кОм		1383 кОм
	4	$\approx \infty$	1091 кОм	1382 кОм	

Контрольные данные. 2. (ЯЦИК 46)

		«Плюсовый» контакт на ножку №			
		1	2	3	4
«Минусовый» контакт на ножку №	1		$\approx \infty$	$\approx \infty$	$\approx \infty$
	2	$\approx \infty$		835 кОм	1091 кОм
	3	$\approx \infty$	834 кОм		1380 кОм
	4	$\approx \infty$	1091 кОм	1379 кОм	

Обращаем внимание на то, что показания омметра при подключении щупов к контакту 1 и любому другому контакту постепенно увеличиваются, и через 10-20 с выходят за диапазон измерений. Так может себя вести только конденсатор. По мере зарядки ток через него уменьшается, и омметр отображает «бесконечное» сопротивление.

Обнаружив конденсатор, не забываем его разряжать после каждого измерения, и контролируем этот процесс с помощью вольтметра.

Катушка индуктивности вела бы себя иначе – ее сопротивление в установившемся режиме должно стремиться к нулю поскольку катушки индуктивности стараются изготовить с малым сопротивлением. Типичные значения индуктивностей катушек, изготавливаемых промышленностью, лежат в диапазоне от десятых долей мкГн до десятков Гн. Характерное время установления тока в цепи, составленной из последовательно соединенных резистора и подобной катушки, порядка $L/R \leq 10^{-4}$ с. То

есть заметить наличие индуктивности, оценивая скорость изменения показаний омметра, не удастся. Поэтому таким способом обнаружить наличие или отсутствие катушки нельзя.

Если последовательно соединены катушка индуктивности и конденсатор, то конденсатор должен довольно быстро (за время $t \leq 2\pi(LC)^{1/2} \approx 0,2$ с) зарядиться, и омметр опять будет отображать «бесконечное» сопротивление. Этого не наблюдается, из чего можно сделать вывод, что катушка индуктивности в черном ящике отсутствует.

Есть еще одно соображение. Если один из элементов – это катушка индуктивности и хотя бы два других элемента – резисторы, то сопротивление ветви цепи, содержащей последовательно соединенные катушку и резистор, с хорошей точностью совпадет с сопротивлением этого резистора. Поэтому измеренное сопротивление двух последовательно соединенных резисторов совпадет с суммой сопротивлений этих резисторов, измеренных по отдельности (при их последовательном соединении с катушкой индуктивности). Этого не наблюдается, из чего также можно сделать вывод о том, что катушка индуктивности в черном ящике отсутствует.

Диод вел бы себя так, что его сопротивление в открытом состоянии было бы мало (но постоянно), а в закрытом – бесконечно велико (но тоже постоянно). Этот случай тоже в наших измерениях не наблюдается.

Таким образом, можно утверждать, что в лучи звезды включены конденсатор (вывод 1) три резистора (выводы 2, 3 и 4).

Значения сопротивлений резисторов определим, решая совместно систему уравнений:

$$R_{23} = R_2 + R_3;$$

$$R_{24} = R_2 + R_4;$$

$$R_{34} = R_3 + R_4;$$

получим:

$$R_2 = \frac{R_{24} + R_{23} - R_{34}}{2} \approx 270 \text{ кОм};$$

$$R_3 = \frac{R_{23} + R_{34} - R_{24}}{2} = 562 \text{ кОм};$$

$$R_4 = \frac{R_{24} + R_{34} - R_{23}}{2} = 820 \text{ кОм}.$$

Для определения напряжения U_0 на выходе омметра и внутреннего сопротивления R_V вольтметра будем заряжать конденсатор в течение не менее, чем пяти минут, от

омметра через резистор с минимальным сопротивлением 270 кОм (рис. 2). При этом конденсатор зарядится до некоторого напряжения U_0 . Затем отсоединим омметр от четырехполюсника и подключим к этому четырехполюснику мультиметр в режиме вольтметра (рис. 3). Вольтметр подключаем к двум выводам четырехполюсника, один из которых соединен с конденсатором, а другой с одним из резисторов (например, R_2). После подключения вольтметра внимательно следим за его показаниями и фиксируем их максимальное значение U_{12} . Показания вольтметра начнут уменьшаться из-за разрядки конденсатора через внутреннее сопротивление вольтметра. Измеренное вольтметром максимальное напряжение

$$U_{12} \approx \frac{U_0 R_V}{R_V + R_2} = 0,227 \text{ В.} \quad (1)$$

Затем процедуру зарядки конденсатора повторяем, а вольтметр подключаем к выводам конденсатора и любого другого резистора (например, $R_3 = 562$ кОм). В этом случае максимальное показание вольтметра

$$U_{13} \approx \frac{U_0 R_V}{R_V + R_3} = 0,184 \text{ В.} \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), с учётом значений R_2 и R_3 , найдём:

$$U_0 = \frac{U_{12} U_{13} (R_3 - R_2)}{U_{13} R_3 - U_{12} R_2} \approx 0,28 \text{ В} \quad \text{и} \quad R_V = \frac{U_{13} R_3 - U_{12} R_2}{U_{12} - U_{13}} \approx 1,0 \text{ МОм.}$$

Для повышения достоверности полученных результатов нужно провести аналогичные измерения и сделать расчеты для всех трех возможных подключений вольтметра к четырехполюснику (1 – 2; 1 – 3; 1 – 4;) (см. рис. 3). Значение $U_{14} = 0,159$ В.

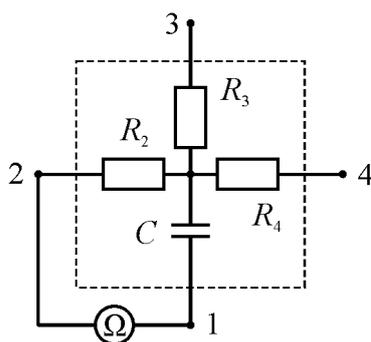


Рис. 2.

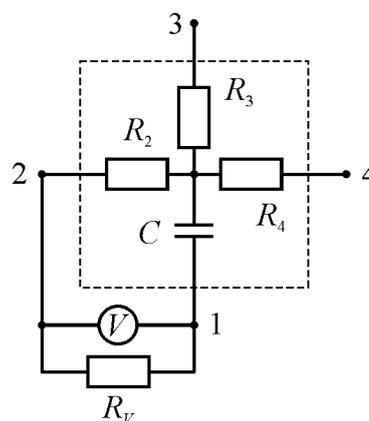


Рис. 3.

Существенное искажение в результаты измерений больших сопротивлений (МОм) может внести «замыкание» двумя руками контактов омметра (электрическое сопротивление человека может составлять «всего» несколько сотен кОм).

Критерии оценивания:

- | | |
|---|----------------|
| 1) Проведена проверка на отсутствие источников | 1 балл |
| 2) Результаты измерений сопротивлений R_{ij} (между выводами) | 1 балл |
| 3) Обнаружен конденсатор | 1 балл |
| 4) Обосновано отсутствие катушки и диода | 1 балл |
| 5) Определены сопротивления резисторов
(в ящике были номиналы 270 кОм, 540 кОм и 810 кОм) | 3 балла |
| если все значения лежат в диапазоне $\pm 5\%$
(255 – 285 кОм, 510 – 570 кОм, 770 – 850 кОм) | 3 балла |
| если все значения лежат в диапазоне $\pm 10\%$
(240 – 300 кОм, 485 – 595 кОм, 730 – 890 кОм) | 1 балл |
| 6) Предложена методика измерения напряжения U_0 и сопротивления R_V | 2 балла |
| 7) Определены показания вольтметра в начальный момент
разрядки конденсатора (по 1 баллу за каждое из трёх измерений) | 3 балла |
| 8) Рассчитано значение U_0 (диапазон 0,25 – 0,30 В) | 1 балл |
| 9) Рассчитано значение R_V (диапазон 0,8 – 1,2 МОм) | 1 балл |
| 10) Оценка погрешности результатов (любая разумная) | 1 балл |