

Возможное решение Э-11-1

Статический метод

Отрежем цилиндр желатина высотой $h = (35 \pm 1)$ мм из толстого шприца. С помощью клея закрепим его на подставке, а затем приклеим к нему сверху линейку так, чтобы она лежала горизонтально.

Для вычисления модуля Юнга снимем зависимость $\varphi(M)$. Угол $\varphi \approx \sin \varphi = \frac{y}{l}$. Для изменения момента силы M будем использовать гайку. Так как угол φ наклона линейки мал $\Rightarrow M = mgr \cos \varphi \approx mgr$. Если гайка начнет сползать, будем закреплять ее желатиновым клеем.

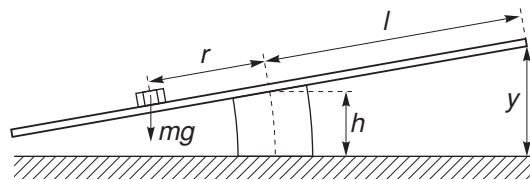


Рис. 11.7

r, cm	y, cm	$\Delta y, \text{cm}$	φ	
0	0	4,4	0,0	0,000000
1	2	6,8	2,4	0,093841
2	3	8,1	3,7	0,144092
3	4	9,2	4,8	0,186058
4	5	10,3	5,9	0,227372
5	6	11,5	7,1	0,271554
6	7	12,6	8,2	0,311125
7	8	13,7	9,3	0,349715

Построим график полученной зависимости,

Угловой коэффициент прямой $s = (4,36 \pm 0,03) \text{ м}^{-1}$

Вычислим модуль Юнга по формуле $E = \frac{4mgh}{\pi s R^4}$

Подставляя полученные значения, получаем: $E = (22 \pm 2) \text{ кПа}$

Динамический метод

В этой части будем использовать установку из предыдущей части, Теперь положим две гайки на одинаковом расстоянии r от центра,

Аккуратно отклоним линейку на небольшой угол так, чтобы она все время оставалась горизонтальной (иначе могут возникнуть другие моды колебаний), и отпустим, Возникнут крутильные колебания, Будем измерять время $t = 10T$, за которое система совершает 10 колебаний в зависимости от расстояния до гаек r , Повторим измерения для каждого значения r несколько раз,

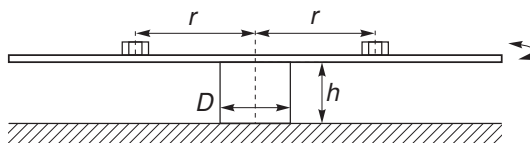


Рис. 11.9

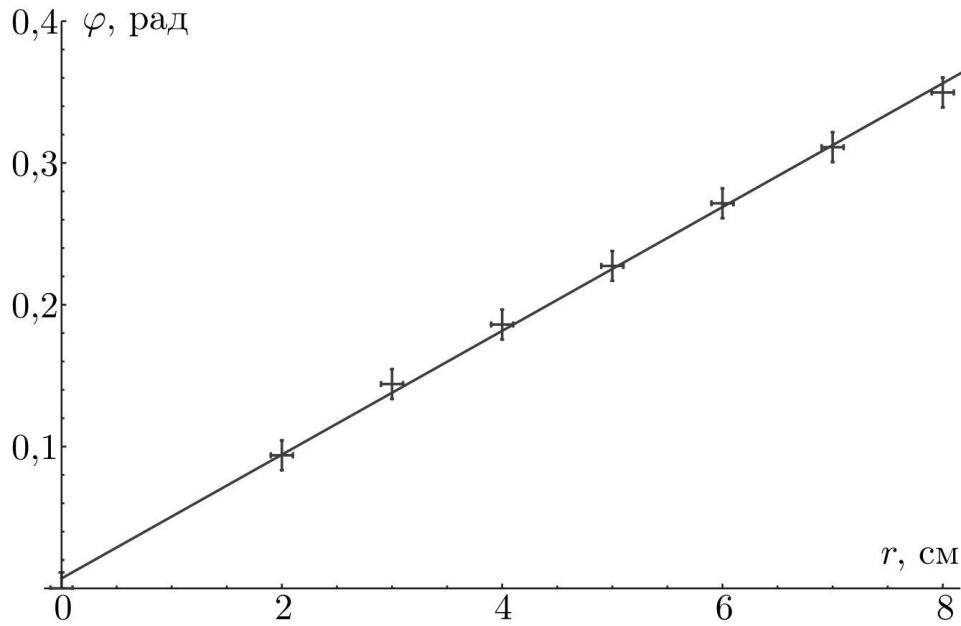


Рис. 11.8

	$r, \text{ см}$	$10T_1, \text{ с}$	$10T_2, \text{ с}$	$10T_3, \text{ с}$	$10T_4, \text{ с}$	$10T_5, \text{ с}$	$r^2, \text{ м}^2$	$T^2, \text{ с}^2$
0	0	6,32	6,34	6,35	6,39	6,34	0,0000	0,402971
1	2	6,41	6,41	6,38	6,38	6,47	0,0004	0,410881
2	4	6,87	6,90	6,94	6,84	6,84	0,0016	0,473069
3	6	7,69	7,72	7,62	7,69	7,69	0,0036	0,590131
4	8	8,59	8,66	8,60	8,63	8,66	0,0064	0,744424
5	10	9,68	9,69	9,63	9,68	9,66	0,0100	0,934702
6	12	10,88	10,99	10,91	10,91	10,88	0,0144	1,191154
7	14	12,12	12,15	12,15	12,10	12,09	0,0196	1,469429
8	16	13,37	13,34	13,41	13,34	13,35	0,0256	1,785430
9	18	14,59	14,60	14,63	14,61	14,62	0,0324	2,134521
10	20	15,93	15,91	15,90	15,91	15,92	0,0400	2,532554

Момент инерции системы равен $I = I_0 + 2mr^2$, где I_0 - момент инерции линейки, Тогда зависимость квадрата периода колебаний T^2 от r^2 будет линейной:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{\chi} = \frac{8\pi^2 m}{\chi} r^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{\chi}$$

Построим линеаризованный график $T^2(r^2)$

Угловой коэффициент прямой $a = \frac{8\pi^2 m}{\chi} = (53,7 \pm 0,3) \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$, Отсюда, используя выра-

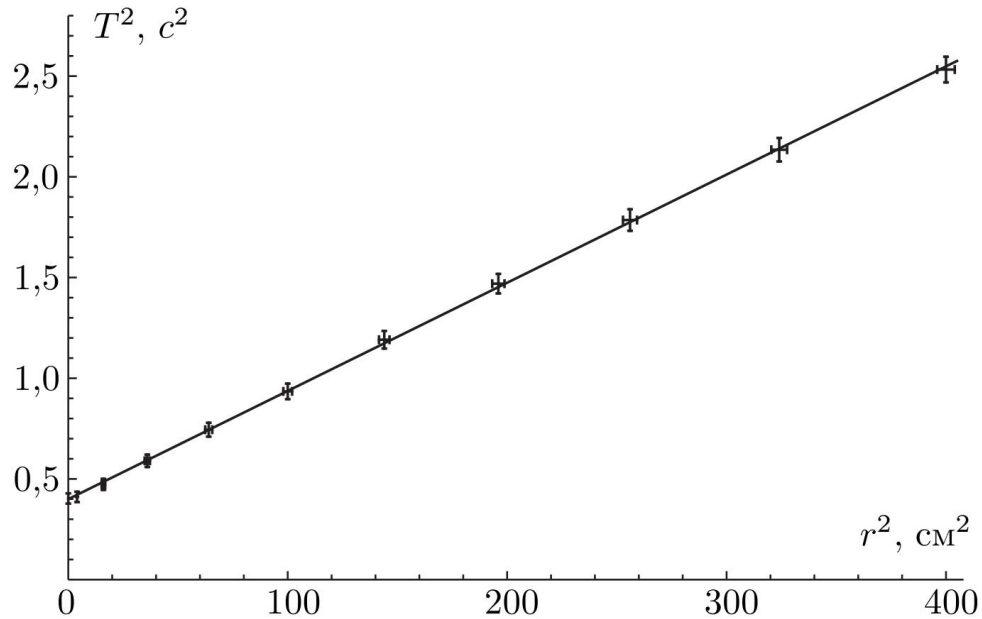


Рис. 11.10

жение для χ , получаем, что модуль Юнга

$$E = \frac{6\chi h}{\pi R^4} = \frac{48\pi m h}{a R^4}$$

Подставляя полученные значения, получаем: $E = (22 \pm 2)$ кПа

Резонансный метод

В этой части нам потребуются цилиндры разной высоты, которые мы будем нарезать из образцов в тонких шприцах, Соберем следующую установку:

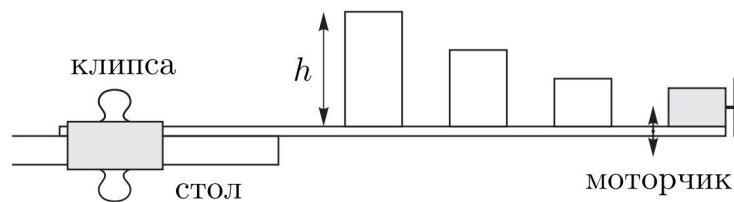


Рис. 11.11

Линейку с моторчиком закрепим на краю стола с помощью клипсы так, чтобы ее конец с двигателем сильно выступал за пределы парты (как минимум, сантиметров на 10), На линейке закрепим несколько желатиновых цилиндров разной высоты, Для каждого цилиндра измерим его резонансную частоту ν_{res} , Для начала настроим частоту с помощью источника тока так, чтобы амплитуда колебаний выбранного цилиндра

	h , см	ν_{res} , об/с	h^{-1} , м ⁻¹	ν_{res} , с ⁻¹
0	4,0	1600	25,000000	26,666667
1	3,4	2000	29,411765	33,333333
2	2,8	2500	35,714286	41,666667
3	2,4	2750	41,666667	45,833333
4	2,0	3300	50,000000	55,000000

высотой H была максимальна, Затем будем светить стробоскопом на вертушку и, изменяя частоту вспышек света, находить положение, когда вертушка останавливается, при этом виден только один винт (если видно несколько винтов, то это кратные частоты), Тогда частота стробоскопа совпадает с частотой колебаний системы,

В цилиндре возбуждается стоячая волна, при этом, так как амплитуда максимальна на конце цилиндра, то там пучность, значит высота цилиндра - это половина длины стоячей волны или четверть длины бегущей волны, то есть $h = \frac{\lambda}{4}$, При этом скорость звука $c = \lambda\nu_{res} \Rightarrow \nu_{res} = \frac{c}{4}h^{-1}$ Измерим ν_{res} для нескольких цилиндров разной высоты, Построим график зависимости $4\nu_{res}(h^{-1})$

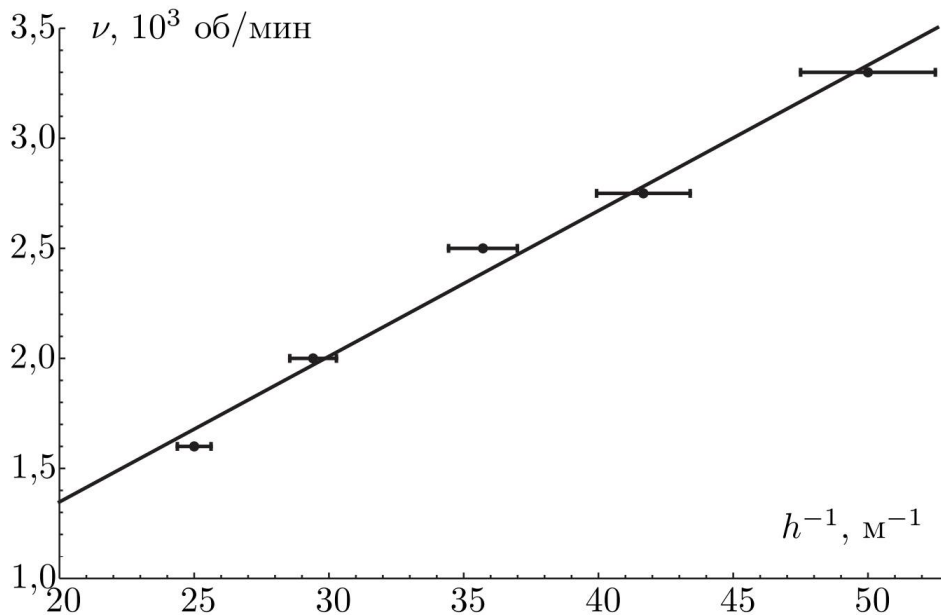


Рис. 11.12

Скорость звука есть угловой коэффициент полученной прямой $c = (4,4 \pm 0,3) \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Посчитаем теоретическое значение $c_{th} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = (4,6 \pm 0,2) \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Критерии оценивания Э-11-1

1. **Статический метод** 3,5 балла
 - (a) Методика измерений 0,2 балла
 - (b) Измерения 1,5 балла
 - 7 точек 1,5 балла
 - 5 точек 1 балл
 - 3 точек 0,5 балла
 - (c) График 1 балл
 - Точки ложатся на прямую 0,4 балла
 - Подписаны оси 0,1+0,1 балла
 - Выбран хороший масштаб 0,2 балла
 - Нанесены кресты ошибок 0,2 балла
 - (d) Модуль Юнга 0,8 балла
 - $E \in [36; 44]$ кПа 0,4 балла
 - $E \in [32; 48]$ кПа 0,2 балла
 - Оценена погрешность 0,4 балла

2. **Динамический метод** 5,7 баллов
 - (a) Методика измерений 0,2 балла
 - (b) Измерения 3 балла
 - Количество периодов колебаний для каждого измерения 0,9 балла
 - 10 периодов 0,9 балла
 - 5 периодов 0,6 балла
 - 3 периода 0,3 балла
 - Количество измерений каждой точки 0,9 балла
 - 5 измерений 0,9 балла
 - 3 измерения 0,5 балла
 - 2 измерения 0,2 балла
 - Количество точек 1,2 балла
 - 10 точек 1,2 балла
 - 7 точек 0,8 балла
 - 5 точек 0,4 балла
 - (c) График 1,3 балла
 - Правильная линеаризация 0,3 балла

- Точки ложатся на прямую 0,4 балла
 - Подписаны оси 0,1+0,1 балла
 - Выбран хороший масштаб 0,1 балла
 - Нанесены кресты ошибок 0,3 балла
- (d) Модуль Юнга 1,2 балла
- $E \in [36; 44]$ кПа 0,6 балла
 - $E \in [32; 48]$ кПа 0,3 балла
 - Оценена погрешность 0,6 балла
- 3. Скорость звука** 5,8 балла
- (a) Методика измерений 1 балл
- (b) Резонанс при $h = \frac{\lambda}{4}$ 1,3 балла
- (c) Измерения 1,5 балла
- 4 точки 1,5 балла
 - 3 точки 1 балл
 - 2 точки 0,5 балла
- (d) График 1 балл
- Точки ложатся на прямую 0,4 балла
 - Подписаны оси - 0,1+0,1 балла
 - Выбран хороший масштаб 0,1 балла
 - Нанесены кресты ошибок 0,3 балла
- (e) Скорость звука 1 балл
- $c \in [6; 7]$ м/с 0,5 балла
 - $c \in [5.5; 7.5]$ м/с 0,3 балла
 - Оценена погрешность 0,5 балла

Возможное решение Э-11-2

1.1. Закрепим нижний магнит на подставке и положим на весы. Верхний магнит фиксируем в держателе при помощи резинки. Для исключения силы тяжести подставки с закреплённым магнитом показания весов при удалённом расположении магнитов зануляем с помощью клавиши «TARE». Тогда при сближении магнитов весы показывают только силу магнитного взаимодействия, причём знаку «+» соответствует отталкивание, а знаку «-» — притяжение магнитов. Важно, чтобы центр магнита находился на оси вращения держателя. Убеждаемся в этом, поворачивая держатель на 180° : сила должна поменяться на противоположную.

а) Магнитный момент нижнего шара ориентируем по вертикали. Верхний шар закрепляем на штативе так, чтобы центры шаров находились на одной вертикали на таком расстоянии, чтобы максимальная сила взаимодействия магнитов соответствовала ≈ 10 г. В начальном положении магнитный момент верхнего шара ориентируем по вертикали и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (весы при этом показывают ≈ -10 г). Поворачивая верхний шар (нижний шар неподвижен), снимаем зависимость показаний весов F_{\parallel} от угла θ .

б) Расстояние между шарами не изменяем (сохраняем как в предыдущем пункте). Магнитный момент нижнего шара ориентируем горизонтально и параллельно плоскости вертикальной стойке штатива. Магнитный момент верхнего шара ориентируем параллельно магнитному моменту нижнего шара и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (она оказывается примерно в два раза меньше максимальной силы притяжения в случае $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$). Поворачивая верхний шар в вертикальной плоскости (нижний шар неподвижен) снимаем зависимость показаний весов F_{\perp} от угла θ .

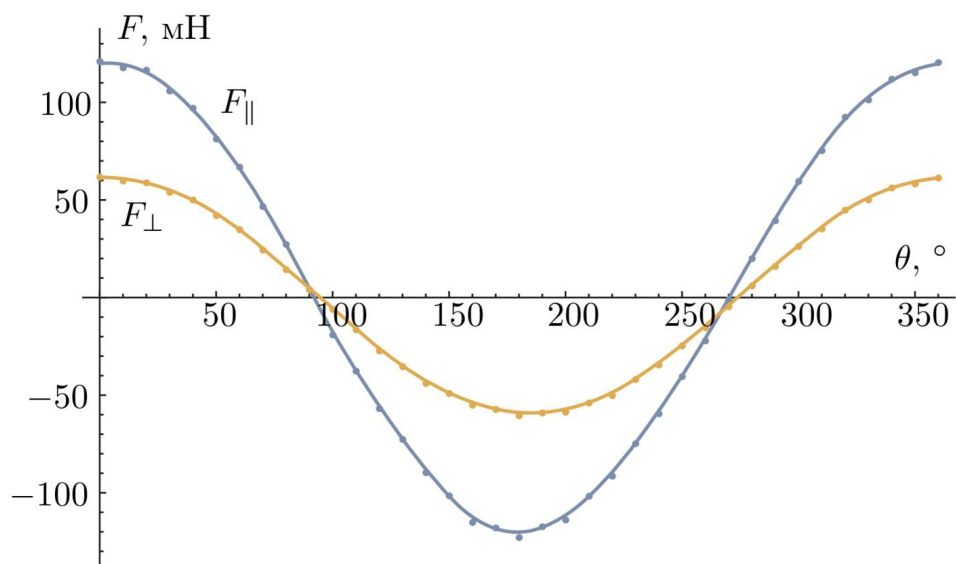


Рис. 11.13

Результаты измерений при расстоянии между шарами при $r = 96$ мм представлены в Таблице №1.

Таблица 1.

$\theta, ^\circ$	$m_{\parallel}, \text{Г}$	$F_{\parallel}, \text{мН}$	$m_{\perp}, \text{Г}$	$F_{\perp}, \text{мН}$	γ	$\theta, ^\circ$	$m_{\parallel}, \text{Г}$	$F_{\parallel}, \text{мН}$	$m_{\perp}, \text{Г}$	$F_{\perp}, \text{мН}$	γ
0	12,42	121,7	6,24	61,2	1,99	10	12,08	118,4	6,04	59,2	2,00
20	11,96	117,2	5,95	58,3	2,01	30	10,87	106,5	5,46	53,5	1,99
40	9,97	97,7	5,07	49,7	1,97	50	8,36	81,9	4,27	41,9	1,96
60	6,89	67,5	3,55	34,8	1,94	70	4,83	47,3	2,50	24,5	1,93
80	2,85	27,9	1,50	14,7	1,90	90	0,48	4,7	0,48	4,7	1,00
100	-1,88	-18,4	-0,53	-5,2	3,55	110	-3,77	-37,0	-1,58	-15,5	2,39
120	-5,73	-56,2	-2,66	-26,1	2,15	130	-7,34	-71,9	-3,46	-34,0	2,12
140	-9,08	-89,0	-4,33	-42,4	2,10	150	-10,29	-100,8	-4,84	-47,5	2,12
160	-11,68	-114,5	-5,44	-53,3	2,15	170	-11,97	-117,3	-5,66	-55,5	2,11
180	-12,47	-122,2	-5,98	-58,6	2,09	190	-11,91	-116,7	-5,84	-57,2	2,04
200	-11,55	-113,2	-5,80	-56,8	1,99	210	-10,32	-101,1	-5,33	-52,2	1,94
220	-9,26	-90,8	-4,95	-48,5	1,87	230	-7,56	-74,1	-4,13	-40,5	1,83
240	-6,00	-58,8	-3,38	-33,1	1,78	250	-4,06	-39,8	-2,40	-23,6	1,69
260	-2,19	-21,5	-1,47	-14,4	1,49	270	-0,04	-0,4	-0,40	-3,9	0,10
280	2,11	20,7	0,67	6,6	3,15	290	4,09	40,1	1,67	16,3	2,46
300	6,14	60,2	2,69	26,4	2,28	310	7,75	76,0	3,59	35,2	2,16
320	9,50	93,1	4,55	44,6	2,09	330	10,41	102,0	5,08	49,7	2,05
340	11,49	112,6	5,69	55,8	2,02	350	11,82	115,8	5,89	57,8	2,01
360	12,36	121,1	6,20	60,8	1,99						

1.2. Графики зависимостей $F_{\parallel}(\theta)$ и $F_{\perp}(\theta)$ представлены на рисунке

1.3. Построим график $\gamma(\theta) = F_{\parallel}(\theta)/F_{\perp}(\theta)$.

2. Если второй диполь находится на оси первого ($\vec{r} \parallel \vec{P}_m$), то

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2 \cos \theta}{r^4}, \quad \text{откуда следует}$$

$$F(0^\circ) = -F(180^\circ) = F_{\parallel}^{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2}{r^4}, \quad F(90^\circ) = F(270^\circ) = 0.$$

Если дипольный момент неподвижного шара перпендикулярен прямой, соединяющей их центры ($\vec{r} \perp \vec{P}_m$), то

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m^2 \cos \theta}{r^4}, \quad \text{откуда следует}$$

$$F(0^\circ) = -F(180^\circ) = F_{\perp}^{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m^2}{r^4}, \quad F(90^\circ) = F(270^\circ) = 0.$$

Из графиков видно, что эксперимент согласуется с теорией при $\theta = 90^\circ, 270^\circ$. Также из теории следует, что амплитуды колебаний силы в первом и втором случаях разли-

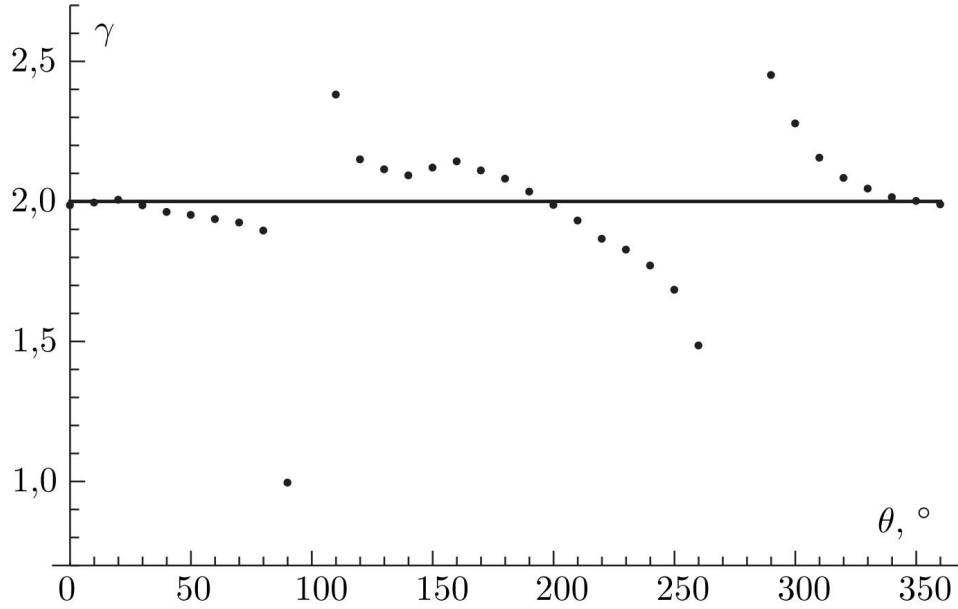


Рис. 11.14

чаются в два раза (при $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ обе силы равны нулю и отношение неопределено):

$$\gamma(\theta) = \frac{F_{\parallel}^{\max}}{F_{\perp}^{\max}} = 2.$$

В пределах погрешности это согласуется с экспериментом:

$$\gamma(\theta) = \frac{F_{\parallel}^{\max}}{F_{\perp}^{\max}} = \frac{12,42 \text{ г}}{6,24 \text{ г}} = 2,02.$$

3. Снимаем зависимость $F(r)$. Поскольку $F \propto r^{-4}$, график $F^{-1/4}(r)$ — линейная функция

Угловой коэффициент зависимости $k_{\text{ш}} = 3,10 \pm 0,15 \text{ мН}^{-1/4}\text{м}$. С помощью него определим силу сцепления:

$$F_{\text{сц}} = F(d) = (k_{\text{ш}}d)^{-4} = 69 \pm 15 \text{ Н}.$$

4. Из формулы для максимальной силы находим:

$$P_m = \sqrt{\frac{F_{\text{сц}}(d/2)^4}{6\mu_0/4}} = 4,15 \text{ Дж/Тл}.$$

5. Найдём индукцию магнитного поля на полюсе:

$$B_{\text{п}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{R^3} = 0,83 \text{ Тл}.$$

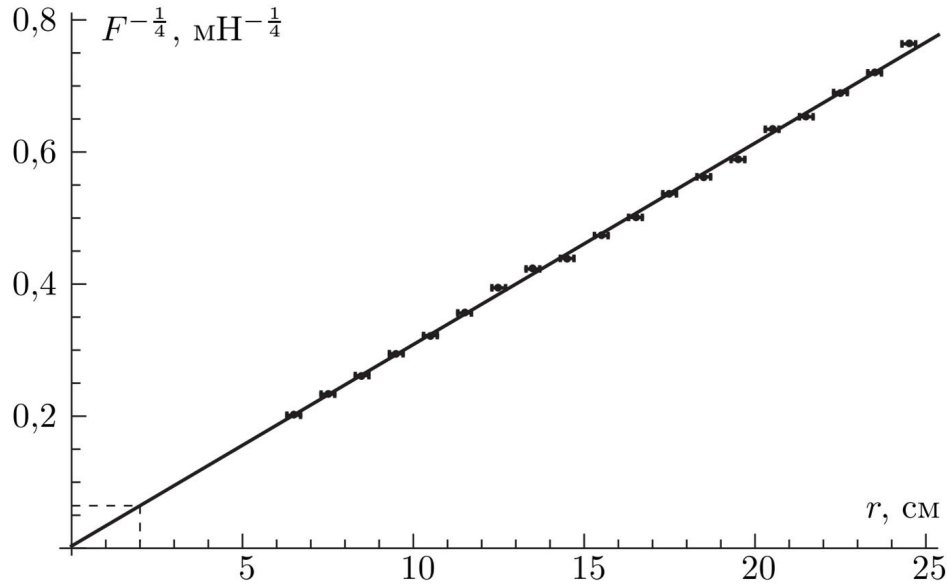


Рис. 11.15

6. Железный шар закрепим на подставке и разместим на весах. Для исключения силы тяжести подставки с закреплённым магнитом, показания весов при удалённом расположении шара и магнита зануляем с помощью клавиши «TARE». Тогда, при сближении шара с магнитом, весы показывают только силу их магнитного взаимодействия: знаку «+» соответствует отталкивание; знаку «-» — притяжение магнитов.

Магнитный шар закрепляем в штативе так, чтобы центры шаров находились на одной вертикали на таком расстоянии, чтобы максимальная сила взаимодействия магнита с шаром составляла $F_{\text{ш}} \approx 5$ г. В начальном положении магнитный момент верхнего шара ориентируем по вертикали и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (весы при этом показывают ≈ 5 г). Поворачивая верхний шар (нижний железный шар — неподвижен), снимаем зависимость показаний весов F от угла θ . Результаты измерений при расстоянии между шарами $r_0 = 46$ мм представлены в таблице 2.

Таблица 2.

$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$	$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$	$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$
0	5,40	52,9	120	2,33	22,8	260	1,40	13,7
20	5,12	50,2	140	3,69	36,2	270	1,35	13,2
40	4,00	39,2	160	4,95	48,5	280	1,53	15,0
60	2,60	25,5	180	5,50	53,9	300	2,50	24,5
80	1,55	15,2	200	4,88	47,8	320	3,88	38,0
90	1,39	13,6	220	3,53	34,6	340	4,94	48,4
100	1,51	14,8	240	2,14	21,0	360	5,42	53,1

Построим график $F_{\text{ш}}(\theta)$ на графике вместе с $F_{\parallel}(\theta)$ и $F_{\perp}(\theta)$. Поскольку диапазон величин $F_{\text{ш}}$ заметно меньше, введём дополнительную ось справа. Отметим, что период

полученной косинусоиды в два раза меньше периода графика $F_{\parallel}(\theta)$.

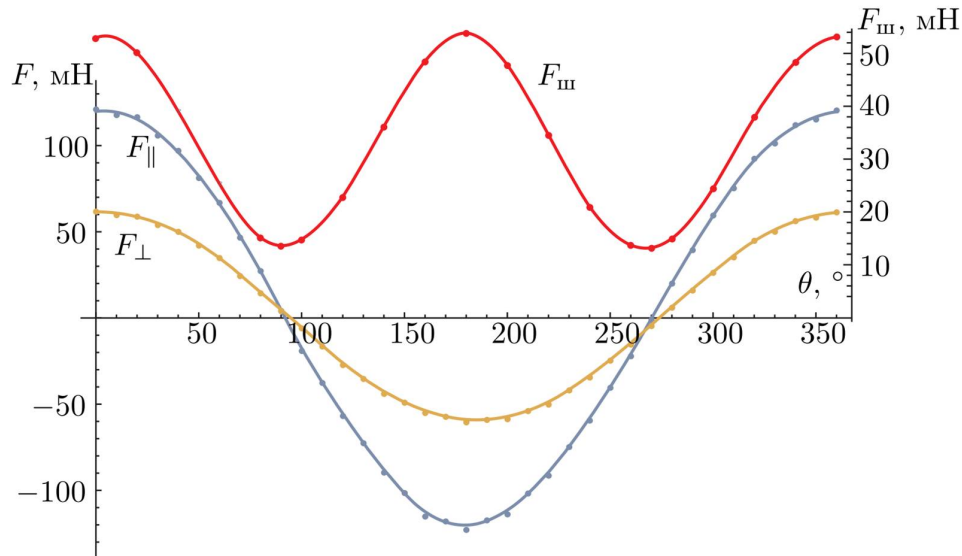


Рис. 11.16

7. Из законов Кулона, а также электрическо-магнитной аналогии не трудно получить что:

$$F_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m \alpha B_{\parallel}}{r^4},$$

где $\alpha B_{\parallel} = \alpha(2P_m)/r^3$ — наведённый момент шара при $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$.

$$F_{\min} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m \alpha B_{\perp}}{r^4},$$

где $\alpha B_{\perp} = \alpha(P_m)/r^3$ — наведённый момент шара при $\vec{r} \perp \vec{P}_m$.

Таким образом, теоретическая оценка $k_T = F_{\max}/F_{\min} = 4$ — хорошо согласуется с экспериментальным значением: $k_3 = 53,1/13,2 = 4,03$.

8. Максимальная сила взаимодействия шара с магнитом на расстоянии между центрами шаров $r_0 = 46$ мм:

$$F_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m P_{\text{ш}}}{r_0^4} = 53,1 \text{ мН.}$$

Экспериментально находим, что примерно такая же сила притяжения возникает между магнитными шарами с магнитными моментами, направленными вдоль линии соединяющей центры шаров, на расстоянии $r = 115$ мм:

$$F_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2}{r^4} = 53,5 \text{ мН.}$$

Теперь можно оценить $P_{\text{ш}}$:

$$\frac{P_{\text{ш}}}{P_m} = \frac{F_{\text{max}}}{F_{\parallel}} \frac{r_0^4}{r^4} \approx 0,024, \text{ откуда } P_{\text{ш}} \approx 0,024 P_m \approx 0,1 \text{ Дж/Тл.}$$

9. Оценим μ из формулы для наведённого магнитного момента

$$P_{\text{ш}} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B R^3 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} 2P_m \frac{R^3}{r_0^3} \approx 0,024 P_m.$$

В пределах погрешности получаем, что отношение

$$\frac{\mu - 1}{\mu + 2} \approx 1, \text{ откуда } \mu \gg 1.$$

Критерии оценивания Э-11-2

1. **Таблица измерений, графики для сил, график для отношения** ..4 балла
 - Таблица измерений
 - Полупериод от минимума до максимума (в таблице есть сила) 1,8+0,2 балла
 - Полупериод от нуля до нуля (в таблице есть сила) .. 0,9+0,1 балла
 - Графики для силы 0,9+0,1 балла
 - График для отношения 1 балл
2. **Вывод формул** 2 балла
 - $F_1 = \frac{6 \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) p_1 p_2}{r^4}$ 0,6 балла
 - $F_2 = \frac{3 \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) p_1 p_2}{r^4}$ 1,2 балла
 - $F_3 = 0$ 0,2 балла
3. **Определение силы сцепления $F_{\text{сц}} = 57 \div 70 \text{ Н}$** 2 балла
 - Экстраполяция 1,2+0,6+0,2 балла
 - Через пропорцию 0,6+0,3+0,1 балла
 - Экспериментально 0,6+0,3+0,1 балла
4. **Определение $P_m = 3,5 \div 4,5 \text{ Дж/Тл}$** 1 балл
 - Аналогично пункту 3
5. **Определение $B = 0,7 \div 0,9 \text{ Тл}$** 1 балл
 - Аналогично пункту 3
6. **Таблица измерений, графики для сил, график для отношения** ... 1 балл
 - Таблица 1,2 балла
 - График 0,4 балла
 - $k_{\text{э}} < \approx 4 (k_{\text{э}} > 3,5)$ 0,4 балла
7. **Определено $k_{\text{т}} = 4$** 1 балл
8. **Определено $P_{\text{ш}} = 0,02 \div 0,5 \text{ Дж/Тл}$** 1 балл
9. **Определение $\mu \left(\frac{\mu-1}{\mu+2} \approx 1\right)$ (при условии наличия 8 пункта)** 1 балл