Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Первый день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.) (*В. Дольников*)

Первое решение. Перенумеруем все города страны как $A_1, A_2, \ldots, A_n$. По условию, существует город B_2, для которого доступны города A_1 и A_2. Далее, города A_3 и B_2 доступны для какого-то города B_3. Поскольку из B_2 можно добраться до A_1 и A_2, они также доступны для B_3. Продолжая такие же рассуждения, мы получим в конце, что существует город B_n, для которого доступны города A_n и B_{n-1}. Тогда для B_n будут доступны и города $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, так как до них можно долететь с пересадкой в B_{n-1}.

Второе решение. Рассмотрим город A, для которого доступно наибольшее количество городов (если таких несколько — любой из них). Предположим, что некоторый город B недоступен для A. Тогда по условию существует город C, для которого и A, и B доступны. Но тогда для C доступны B, а также все города, доступные для A. Это противоречит выбору A; значит, для A доступны все города.

9.2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, а прямая ZC касается окружности ω, имеем $\angle ADB = \angle YBC = \angle YCZ$. Следовательно, $\angle YDZ + \angle YCZ = 180^\circ$, то есть четырёхугольник $CYDZ$ — вписанный (см. рис. 1).

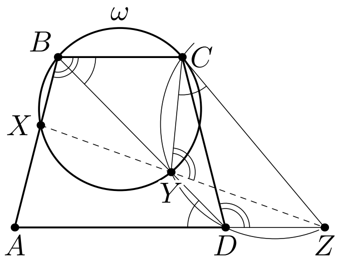

Рис. 1

Значит, $\angle CYZ = \angle CDZ = \angle XBC = 180^\circ - \angle CYX$, где последние два равенства следуют из того, что трапеция $ABCD$ равнобокая, а четырёхугольник $XBCY$ вписан в ω. Таким образом, $\angle CYZ + \angle CYX = 180^\circ$, поэтому точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

9.3. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъемностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег? (*А. Шаповалов, С. Усов*)

Ответ. Нет.

Первое решение. Предположим, что переправа гномам удалась. Назовём рейсы лодки с левого берега на правый *прямыми*, а с правого на левый — *обратными*. Пусть было k обратных рейсов; тогда прямых рейсов было $k+1$.

В k обратных рейсах гребли k разных гномов; значит, суммарный вес гномов, участвовавших в обратных рейсах, не меньше $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (здесь и далее все веса измеряются в фунтах). На любом прямом рейсе суммарный вес гномов не превосходит 100, так что в итоге суммарный вес гномов на левом берегу уменьшился не более, чем на $100(k+1) - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(200-k)(k+1)}{2}$. С другой стороны, этот вес уменьшился на $1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2}$, откуда

$$(200-k)(k+1) \geqslant 100 \cdot 101, \quad \text{или} \quad (k-100)(k-99) \leqslant 0.$$

Это может случиться лишь если $k = 99$ или $k = 100$. При этом неравенство обращается в равенство; это значит, что в k обратных рейсах участвовали только гномы весами $1, 2, \ldots, k$ — каждый по одному разу, а на каждом прямом рейсе суммарный вес гномов был равен 100.

Ясно, что гном весом 100 совершал все свои рейсы (один рейс при $k = 99$ и три при $k = 100$) в одиночку; рассмотрим теперь только остальных (*обычных*) гномов и их рейсы (их ровно 99 прямых и 99 обратных в любом случае). В каждом из прямых рейсов участвовало хотя бы 2 обычных гнома; значит, общее количество обычных гномов на правом берегу увеличилось как минимум на $99 \cdot 2 - 99 = 99$. Это неравенство также обращается в равенство, так что на каждом прямом рейсе участвовало ровно два гнома. Но тогда гном веса 50 должен был плыть с гномом веса 50, а второго такого нет. Противоречие.

Замечание. На последнем шаге решения можно действовать и по-другому. Мы получили, что все гномы с весами 1, 2, ..., 99 совершили по два прямых рейса, и на каждом из них суммарный вес был равен 100. Это значит, что гном веса 99 оба прямых рейса совершал с гномом веса 1, гном веса 98 — с гномом веса 2, и т.д. Но тогда гному веса 50 не с кем было совершать свои прямые рейсы.

Второе решение. Мы также предполагаем противное. Воспользуемся терминологией, введённой в начале предыдущего решения.

Назовём гномов с весами 50, 51, 52, ..., 100 *тяжёлыми*, а остальных — *лёгкими*. Пусть тяжёлые гномы были гребцами в d обратных рейсах. Тогда эти d тяжёлых гномов совершили хотя бы по два прямых рейса, а остальные — хотя бы по одному. Поскольку два тяжёлых гнома не могли плыть одновременно, количество прямых рейсов было не меньше, чем $2d + (51 - d) = 51 + d$. Значит, обратных рейсов было не меньше, чем $50 + d$, то есть хотя бы в 50 из них гребцами были лёгкие гномы. Но лёгких гномов всего 49, так что один из них должен был дважды грести в обратном рейсе, что невозможно.

9.4. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности? (*С. Берлов*)

Ответ. Да, существует.

Решение. Построим пример такой последовательности. Положим $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = (3a_n)! + 1$. Для того, чтобы показать, что она удовлетворяет требованиям, нам придётся эти требования несколько усилить. Будем говорить, что пара (тройка) чисел *хорошая*, если все её элементы, отличные от единицы, различны (а единица может встретиться в ней несколько раз). Докажем следующее утверждение, из которого будет следовать, что построенная последовательность — требуемая.

Пусть (a_i, a_j) и (a_p, a_q, a_r) — хорошие пара и тройка элементов последовательности. Тогда

$$\textit{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_q + a_r) = \textit{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_q - a_r) = 1.$$

Доказательство проведём индукцией по наибольшему индексу m среди i, j, p, q и r. Если $m = 1$, утверждение тривиально. Для перехода предположим, что $m > 1$. Число a_m лежит либо только в паре (a_i, a_j), либо только в тройке (a_p, a_q, a_r), либо в обеих.

Случай 1. Пусть a_m — только элемент пары; скажем, $a_m = a_j$. Тогда, поскольку $0 < |a_p + a_q \pm a_r| \leqslant 3a_{m-1}$, число $a_m - 1 = (3a_{m-1})!$ делится на $a_p + a_q \pm a_r$, то есть $\text{НОД}(a_i + a_m, a_p + a_q \pm a_r) = \text{НОД}((a_i + 1) + (a_m - 1), a_p + a_q \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_1, a_p + a_q \pm a_r) = 1$ по предположению индукции.

Случай 2. Пусть a_m — только элемент тройки; скажем, $a_m = a_q$. Аналогично, $a_m - 1$ делится на $a_i + a_j$, так что $\text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_m \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_1 \pm a_r) = 1$ по предположению индукции.

Случай 3. Пусть a_m — элемент и пары, и тройки; скажем, $a_m = a_j = a_q$. Тогда $a_m - 1$ делится на $a_p - a_i \pm a_r$, так что $\text{НОД}(a_i + a_m, a_p + a_m \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_m, (a_p + a_m \pm a_r) - (a_i + a_m)) = \text{НОД}(a_i + a_m, a_p - a_i \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_1, a_p - a_i \pm a_r) = 1$ по предположению индукции. Переход индукции доказан.