Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Первый день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.1. На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2. Известно, что отрезки, высекаемые графиками на ℓ_1, равны, и отрезки, высекаемые графиками на ℓ_2, также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают. (*А. С. Голованов*)

Первое решение. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — данные приведённые квадратные трёхчлены, а параболы Γ_1 и Γ_2 — их графики. Тогда существует единственный вектор $\overrightarrow{a}$ такой, что при параллельном переносе на этот вектор парабола Γ_1 переходит в Γ_2 (вектор $\overrightarrow{a}$ соединяет вершины парабол).

Пусть прямая ℓ_1 пересекает Γ_1 в точках A_1 и B_1, а Γ_2 — в точках A_2 и B_2 так, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. При параллельном переносе параболы Γ_1 на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ получается парабола Γ_3, являющаяся графиком приведенного трёхчлена $f_3(x)$, которая пересекает ℓ_1 в тех же точках, что и Γ_2. Тогда разность $f_2(x) - f_3(x)$ имеет хотя бы два корня (абсциссы точек A_2 и B_2). Но, поскольку степень многочлена $f_2(x) - f_3(x)$ не выше 1, то $f_2(x) - f_3(x) \equiv 0$, то есть $\Gamma_3 = \Gamma_2$. Значит, вектор сдвига $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ параллелен прямой ℓ_1.

Аналогично, $\overrightarrow{a} \parallel \ell_2$, тем самым $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Второе решение. Пусть $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ — данные квадратные трёхчлены, Γ_1 и Γ_2 — их графики, а $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно.

Заметим, что длина отрезка, высекаемого параболой $y = x^2 + px + q$ на прямой $y = kx + b$, равна модулю разности корней уравнения $x^2 + px + q = kx + b$, делённому на косинус угла наклона прямой $y = kx + b$. При этом модуль разности корней приведённого квадратного трёхчлена равен корню из его дискриминанта. Значит, условие того, что Γ_1 и Γ_2 высекают на ℓ_1 равные отрезки, записывается как

$$(p_1 - k_1)^2 - 4(q_1 - b_1) = (p_2 - k_1)^2 - 4(q_2 - b_1).$$

Преобразуя это равенство, получаем $(p_1 - p_2)(p_1 + p_2 - 2k_1) = 4(q_1 - q_2)$. Если $p_1 = p_2$, то $q_1 = q_2$ и задача решена. Иначе

$$k_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{2(q_1 - q_2)}{p_1 - p_2}\,.$$

Точно те же рассуждения можно провести и для прямой ℓ_2. Итак, если параболы не совпадают, то $k_1 = k_2$, то есть $\ell_1 \parallel \ell_2$, что невозможно по условию.

10.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая AO пересекает ℓ в точке T (см. рис. 2). Из симметрии относительно AO имеем $\angle B'TO = \angle C'TO$. Поскольку $\ell \parallel AC$, получаем $\angle C'TO = \angle OAC = \angle OCA$. Итак, $\angle B'TO = \angle B'CO$, то есть T лежит на окружности ω, описанной около треугольника $B'OC$. Кроме того, из тех же соображений имеем $\angle OB'T = \angle OC'T = \angle OCA = \angle OTC'$, то есть $C'T$ касается ω в точке T.

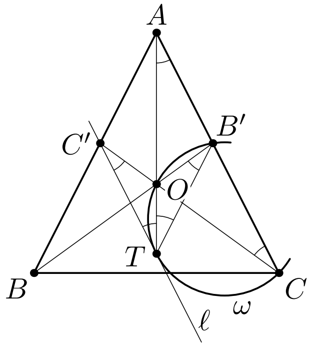

Рис. 2

Замечание. Можно заметить, что O и T — центры окружностей, описанных около треугольника $B'C'T$ и трапеции $BCB'C'$ соответственно.

10.3. Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

(*Д. Белов, И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. Илья.

Решение. Покажем, как Илье ходить, чтобы гарантированно выиграть. Обозначим через A, B и C кучки, в которых изначально было 100, 101 и 102 камня соответственно. Первым ходом Илья возьмёт камень из кучки B. Далее возможны два случая.

Случай 1. Своим первым ходом Костя возьмёт камень не из кучки B. Тогда Илья всегда будет повторять ход за Костей, то есть брать камень из той же кучки, из которой только что брал камень Костя. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после любого его хода в каждой кучке остаётся чётное число камней.

Свой второй ход Илья сможет сделать, так как Костя взял свой первый камень не из B. После этого каждым ходом Костя будет брать камень из кучки X, отличной от кучки Y, из которой только что взял Илья. Тогда в X останется нечётное число камней, и Илья сможет взять из X ещё один камень. Значит, действуя по этой стратегии, Илья всегда сможет сделать ход после хода Кости. Поскольку игра рано или поздно закончится, Костя проиграет.

Случай 2. Своим первым ходом Костя возьмёт камень из кучки B. В этом случае Илья будет действовать по следующей стратегии. Если перед текущим ходом Ильи Костя брал камень из кучки C, то Илья берёт камень оттуда же. Если же Костя брал камень из кучки A или B, то Илья берёт камень из кучки B или A соответственно. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после любого его хода в C будет чётное число камней, а в A и B камней будет поровну.

Опять же, нам достаточно показать, что Илья всегда сможет сделать ход согласно этой стратегии. Свой второй ход Илья сделать сможет (взяв камень из A). Если на очередном шаге ему нужно брать камень из кучки C, то до этого оттуда брал камень Костя, значит, на предыдущем ходу оба игрока не брали ничего из C. При этом после хода Кости там нечётное число камней, поэтому Илья может взять камень из C. Если же Илье нужно брать камень из кучки A или B, скажем, из A, то Костя только что взял камень из B (и, значит, в A ещё есть камень). Значит, на предыдущем шаге Костя не мог брать камень из B, поэтому Илья не брал камень из A, то есть он может взять камень оттуда на текущем шаге.

Замечание. Стратегия, описанная в случае 2, также работает, если Костя своим первым ходом возьмёт камень из C.

10.4. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$. (*Ф. Петров*)

Решение. Мы докажем, что существуют даже числа b_1, b_2, $\ldots$, b_n, удовлетворяющие следующим (более сильным) условиям:

(1) $b_i \geqslant a_i$ при всех $i \leqslant n$;

(2) $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$;

(3) отношение любых двух из чисел b_i является степенью двойки (с целым показателем).

Заметим, что доказываемое утверждение не изменится, если какое-то из чисел a_k (а с ним и соответствующее b_k) умножить на некоторую степень двойки. Умножим каждое из чисел a_k на степень двойки так, чтобы все полученные числа лежали в промежутке $[1, 2)$.

Не умаляя общности можно считать, что $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < 2$. Покажем теперь, что одна из следующих n последовательностей удовлетворяет всем трём условиям:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1, & 2a_1, & 2a_1, & 2a_1, & \ldots, & 2a_1, & 2a_1; \\
a_2, & a_2, & 2a_2, & 2a_2, & \ldots, & 2a_2, & 2a_2; \\
a_3, & a_3, & a_3, & 2a_3, & \ldots, & 2a_3, & 2a_3; \\
 & & & \cdots & & & \\
a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & \ldots, & a_{n-1}, & 2a_{n-1}; \\
a_n, & a_n, & a_n, & a_n, & \ldots, & a_n, & a_n.
\end{array}$$

Поскольку для любых k и ℓ выполнено неравенство $2a_\ell \geqslant 2 > a_k$, каждая из последовательностей удовлетворяет (1). Кроме того, каждая из последовательностей, очевидно, удовлетворяет (3). Осталось показать, что хотя бы одна из них удовлетворяет (2).

Для этого заметим, что произведение всех n^2 чисел во всех

n последовательностях равно

$$2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+0} \cdot a_1^n a_2^n \ldots a_n^n = \left(2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n\right)^n.$$

Следовательно, произведение чисел хотя бы в одной из последовательностей не превосходит $2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$, что и требовалось.