

7 класс

7.1. На длинной ленте написаны цифры 201520152015... Вася вырезал ножницами два куска ленты и составил из них положительное число, которое делится на 45. Приведите пример таких кусков и запишите число, составленное из них.

Ответ: например, можно вырезать куски «2» и «520» и составить из них число 2520, которое делится на 45.

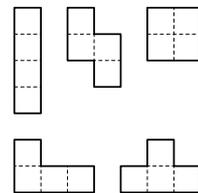
Возможны и другие варианты: из кусков 52 и 20 составляется число 5220; из кусков 1 и 2015 — число 12015, из кусков 201 и 15 — число 20115, и так далее.

Пример можно подобрать, исходя из следующих соображений: число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 9 и на 5. Поэтому, используя соответствующие признаки делимости, получим, что во втором куске последняя цифра должна быть либо 5, либо 0, а сумма цифр в обоих кусках должна делиться на 9.

Критерии проверки:

- + верно указаны оба куска и составленное число (обоснования не требуются)
- ± верно указаны оба куска, но не записано составленное число
- ± приведено несколько примеров кусков и составленного числа, среди которых есть как верный, так и неверные
- ∓ верно указано только составленное число, но неясно, из каких кусков оно составлено
- задача не решена или решена неверно

7.2. Заполните квадрат размером 6×6 фигурками тетриса (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать.)



Ответ: например, см. рис. 7.2.

Существуют и другие примеры.

Критерии проверки:

- + приведен верный пример
- ± приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные
- ∓ приведен только пример, в котором отсутствует ровно один из указанных видов тетриса
- приведен только пример, в котором отсутствуют несколько указанных видов тетриса (более одного вида)
- задача не решена или решена неверно

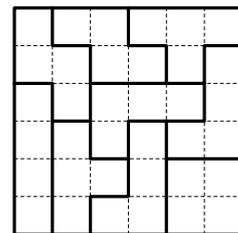


Рис. 7.2

7.3. На завтрак Карлсон съел 40% торта, а Малыш съел 150 г. На обед Фрекен Бок съела 30% остатка и ещё 120 г, а Матильда вылизала оставшиеся 90 г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?

Ответ: 750 г.

Решение. *Первый способ (решаем «с конца»).*

- 1) $90 + 120 = 210$ (г) торта осталось после того, как Фрекен Бок съела 30% остатка. Так как Фрекен Бок съела 30% остатка, то 210 г — это 70% остатка.
- 2) $210 : 0,7 = 300$ (г) торта было перед тем, как Фрекен Бок приступила к обеду.
- 3) $300 + 150 = 450$ (г) торта было перед тем, как начал есть Малыш. Так как Карлсон съел 40% торта, то 450 г составляет 60% торта.
- 4) $450 : 0,6 = 750$ (г) изначальная масса торта.

Второй способ (составляем уравнение). Пусть x г — изначальная масса торта, тогда после завтрака Карлсона и Малыша осталось $0,6x - 150$ (г), после обеда Фрекен Бок осталось $0,7(0,6x - 150) - 120 = 0,42x - 225$ (г), что составляет 90 г, вылизанных Матильдой. Получим уравнение $0,42x - 225 = 90$, решением которого является $x = 750$.

Критерии проверки:

- + приведено полное обоснованное решение
- ± приведено решение «с конца», в котором верно выполнены все действия и получен верный ответ, но пояснения отсутствуют
- ± верно составлено и решено уравнение, но пояснения к составлению уравнения отсутствуют

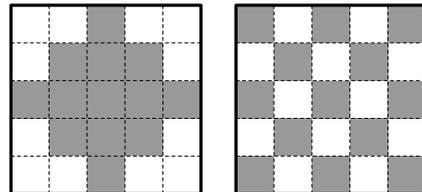
⊕ присутствует идея решения «с конца» и хотя бы первое действие выполнено верно, но до конца решение не доведено или доведено с ошибками

⊕ верно составлено уравнение, но оно не решено или при его решении допущена арифметическая ошибка

⊕ приведен только верный ответ (возможно, с проверкой, что он годится)

– задача не решена или решена неверно

7.4. За одну операцию можно поменять местами любые две строки или любые два столбца квадратной таблицы. Можно ли за несколько таких операций из закрашенной фигуры, изображенной на рисунке слева, получить закрашенную фигуру, изображенную на рисунке справа? Ответ обоснуйте.



Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что фигура, изображенная слева, содержит полностью закрашенный столбец таблицы, а у фигуры, изображенной справа, такого столбца нет. При любой перестановке столбцов или строк этот столбец сохранится, так как перестановка столбцов изменяет только его расположение, а перестановка строк не изменяет в нем ничего. Следовательно, никаким количеством указанных операций получить из одной фигуры другую невозможно.

Можно также проводить аналогичное рассуждение не для закрашенного столбца, а для полностью закрашенной строки.

Отметим, что рассуждение типа «при любой перестановке столбцов всегда будет полностью закрашенный столбец, а при любой перестановке строк всегда будет полностью закрашенная строка» нельзя признать полностью верным, так как, формально говоря, из этого не следует, что перестановка столбцов не может разрушить закрашенную строку, а перестановка строк не может разрушить закрашенный столбец.

Критерии проверки:

+ приведено полное обоснованное решение

± приведено верное в целом рассуждение, в котором присутствует идея «инварианта», но она сформулирована недостаточно четко (например, см. комментарий)

– приведен только ответ

– задача не решена или решена неверно

7.5. На доске записаны 7 различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число $\frac{3}{7}$. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Ответ: кто-то из них наверняка ошибся.

Решение. Пусть на доске записаны числа a, b, c, d, e, f и g , причем $a < b < c < d < e < f < g$, тогда Танино число равно $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}$, а Данино число — это d . Из условия задачи следует, что $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7} - d = \frac{3}{7}$, то есть $a+b+c+d+e+f+g - 7d = 3$.

После приведения подобных слагаемых это равенство можно записать так: $a+b+c+e+f+g = 6d+3$. Заметим, что в левой части полученного равенства стоит сумма шести нечетных слагаемых, которая всегда четна, а в правой части стоит число, которое нечетно при любых целых значениях d . Таким образом, это равенство выполняться не может, значит, Таней или Даней допущена ошибка (возможно, ошибку допустили оба).

Критерии проверки:

+ приведено полное обоснованное решение

± приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробы

⊕ в рассуждениях присутствует идея «четности», но решение не доведено до конца или содержит либо логические, либо арифметические ошибки

– верный ответ получен путем рассмотрения конкретного набора чисел

– приведен только ответ

– задача не решена или решена неверно