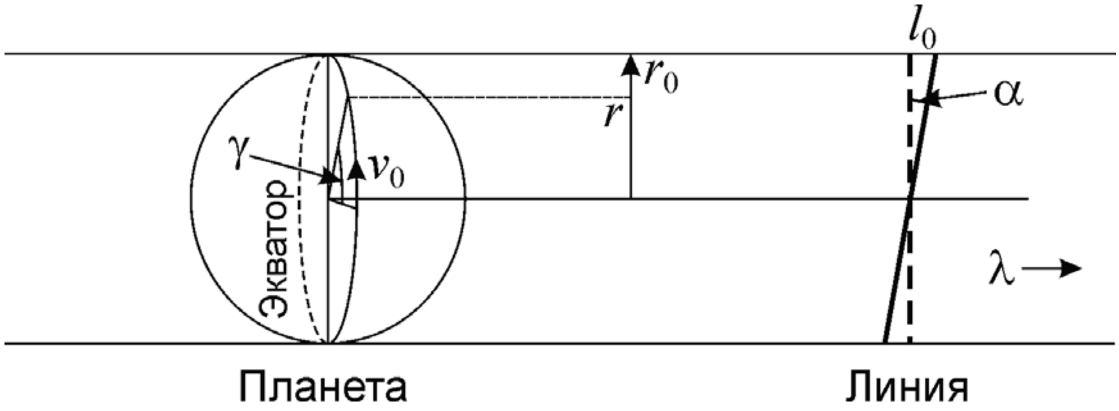
X/XI.3 НАКЛОННАЯ ЛИНИЯ

О.С. Угольников

? С помощью системы из телескопа и спектрографа с фокусным расстоянием 5 м и разрешением (масштабом) 10 Å/мм получен спектр некоторой планеты. Наблюдатель находится в плоскости экватора планеты, щель спектрографа ориентирована вдоль этой же плоскости. Атмосферные линии в спектре планеты оказались наклоненными на угол 5° по отношению к линиям лабораторного источника света. Найдите расстояние до планеты, если ее период обращения вокруг своей оси равен 10 часам. Наблюдения проводятся в спектральной области около длины волны 5500 Å.



! Разрешение спектрографа ρ есть отношение разности длин волн двух соседних спектральных линий к расстоянию между этими линиями в наблюдаемом спектре. Для прибора, описанного в условии задачи, эта величина составляет:

$$\rho = \frac{\Delta\lambda}{\Delta l} = 10^{-6}.$$

Спектральная линия, которая наблюдается с этим прибором, есть изображение щели спектрографа в данной длине волны, в которой объект темнее (для линии поглощения) или светлее (для линии излучения), чем в окружающей спектральной области. По условию задачи, щель спектрографа параллельна экватору планеты.

Пусть планета создает в фокальной плоскости прибора изображение с экваториальным радиусом r_0. Тогда за счет вращения планеты вид спектральной линии будет искажен, но она останется прямой. Это легко показать: возьмем точку экватора с долготой γ относительно меридиана, повернутого к Земле. При наблюдении с Земли она будет отстоять от центра диска на угловое расстояние

$$r = r_0 \sin\gamma,$$

а ее лучевая скорость будет равна

$$v = v_0 \sin\gamma = v_0 \frac{r}{r_0}.$$

Смещение соответствующего участка спектральной линии составит

$$\Delta l = \frac{\Delta\lambda}{\rho} = \frac{v\lambda}{c\rho} = \frac{v_0\lambda}{c\rho} \cdot \frac{r}{r_0} = \alpha \cdot r.$$

Здесь c – скорость света, λ – длина волны спектрального диапазона, в котором проводятся наблюдения. Линия остается прямой, но наклоняется на угол α, выраженный в последней формуле в радианах (мы учитываем, что этот угол невелик). Теперь мы можем выразить величину линейной скорости на экваторе планеты:

$$v_0 = \frac{c\,\rho r_0 \alpha}{\lambda} = \frac{2\pi R}{T}.$$

Здесь R – пространственный экваториальный радиус планеты, а T – период ее осевого вращения. Видимый радиус планеты b равен r_0/F, где F – эффективное фокусное расстояние оптической системы. Расстояние до планеты равно

$$D = \frac{R}{b} = \frac{R}{r_0 / F} = \frac{RF}{r_0} = \frac{v_0 T}{2\pi} \cdot F \cdot \frac{c\rho\alpha}{v_0 \lambda} = \frac{FTc\rho\alpha}{2\pi\lambda}.$$

Подставляя численные данные, получаем расстояние в 1.35 млрд км или 9 а.е.

X/XI.4 ЦЕПОЧКА НА ОРБИТЕ

О.С. Угольников

? На одну и ту же околосолнечную орбиту с небольшим эксцентриситетом *e* было запущено 10000 одинаковых спутников – больших гладких металлических шаров, с интервалом 1/10000 орбитального периода *T*. С одного спутника ведутся измерения видимой звездной величины соседнего спутника. С каким периодом и какой амплитудой (разницей максимума и минимума) будет меняться эта звездная величина? Гравитационное взаимодействие шаров друг с другом и с планетами не учитывать.

! Количество шаров достаточно велико, и участок орбиты между двумя соседними шарами можно считать прямой линией. Расстояние между шарами равно $d=vt$, где v – скорость шаров (которую можно считать одинаковой), а t – временной интервал между моментами запуска соседних спутников (или интервал между моментами прохождения ими какой-то фиксированной точки орбиты). Это время равно $T/10000$. Для расстояния от Солнца r скорость равна

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Металлические шары отражают свет равномерно во все стороны. В этом случае яркость одного шара при наблюдении с соседнего шара будет обратно пропорциональна квадрату их расстояния от Солнца и квадрату расстояния между ними:

$$J = \frac{const}{d^2 r^2} = \frac{const}{v^2 r^2} = \frac{const}{GMr^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{const}{2x - x^2}; \quad x = \frac{r}{a}.$$

Величина x изменяется от $(1-e)$ до $(1+e)$. Можно сделать вывод, что вблизи перигелия и афелия яркость соседнего спутника будет одинаковой: меньшее расстояние от Солнца будет компенсировано большим расстоянием между соседними спутниками и наоборот. Данный вывод можно получить и из II закона Кеплера. Между перигелием и афелием яркость будет уменьшаться. Так как эксцентриситет орбит небольшой, минимум будет достигаться примерно посередине между этими точками. Период изменения видимой яркости соседнего спутника составит $T/2$. Чтобы определить амплитуду, запишем выражение для звездной величины соседнего спутника:

$$m = const - 2.5\lg J = m_0 + 2.5\lg(2x - x^2) = m_0 + 2.5\lg(1 - (x-1)^2).$$

В перигелии ($x = 1 - e$) величина в скобках равна ($1 - e^2$), такой же она будет и в афелии ($x = 1 + e$). Когда расстояние сравняется со средним ($x = 1$), величина в скобках будет равна единице. В итоге, разность звездных величин будет равна

$$\Delta m = 2.5\lg(1 - e^2) \approx 2.5e^2 / \ln 10 = 1.08e^2.$$

Последние два равенства справедливы, если эксцентриситет орбит существенно меньше единицы.

X.5 ПОХОЖИЕ, НО РАЗНЫЕ ЗВЕЗДЫ

О.С. Угольников

? Две звезды имеют в небе Земли одинаковую звездную величину в полосе V, а в полосе B первая звезда ярче второй. У какой из этих двух звезд больше угловой диаметр? Межзвездным поглощением света пренебречь.

! По условию задачи, межзвездное поглощение для этих звезд несущественно и не сказывается на их цветовых характеристиках. Поэтому цвет звезд определяется только их эффективной температурой. В полосе V (желто-зеленой) видимый блеск звезд одинаков, а в полосе B (синей) первая звезда ярче второй. Следовательно, максимум излучения в спектре первой звезды приходится на меньшую длину волны, и температура первой звезды больше.

В отсутствие межзвездного поглощения видимая яркость звезды пропорциональна $R^2 f(T)/D^2$, где R и T – радиус и температура звезды, D – расстояние до нее. Функция температуры $f(T)$ является возрастающей для любого спектрального интервала (для интегральной светимости эта функция есть четвертая степень температуры T^4). В полосе V яркости звезд одинаковы, следовательно, у второй звезды больше отношение R/D, то есть больше угловой радиус и диаметр.

X.6 СФЕРИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ

Е.Н. Фадеев

? Определите радиус кружка сферической аберрации в фокусе сферического зеркала с диаметром *d* и фокусным расстоянием *f*, если далекий точечный источник света расположен на оптической оси зеркала. Фокус зеркального объектива находится посередине между центром кривизны и поверхностью зеркала. Если фокусное расстояние равно 1 м, то какого диаметра может быть зеркало, чтобы кружок сферической аберрации был меньше, чем дифракционный кружок на длине волны 550 нм?

! Рассмотрим луч, идущий вдоль оптической оси на расстоянии h от нее. Этот луч, отразившись от зеркала, пересечет оптическую ось на расстоянии x от центра кривизны. Пусть угол отражения равен α. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{h}{2f}.$$

Обратим внимание, что угол между оптической осью зеркала и радиусом в точке касания также равен α. Воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{2f}{\sin(\pi - 2\alpha)}; \qquad x = 2f\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{f}{\cos\alpha} = f\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

Из этой формулы видно, что, чем дальше от оптической оси шел луч до отражения, тем дальше от фокуса он пересечет оптическую ось после отражения и, очевидно, тем дальше от оптической оси попадет на фокальную плоскость. Расстояние от точки пересечения оптической оси до фокуса составит

$$\delta = x - f = f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - 1\right) \approx f\frac{\sin^2\alpha}{2}.$$

Полученная величина называется продольной сферической аберрацией. Продолжая свой путь, луч пересечет фокальную плоскость на расстоянии y от оптической оси. Поскольку δ и y – стороны прямоугольного треугольника,

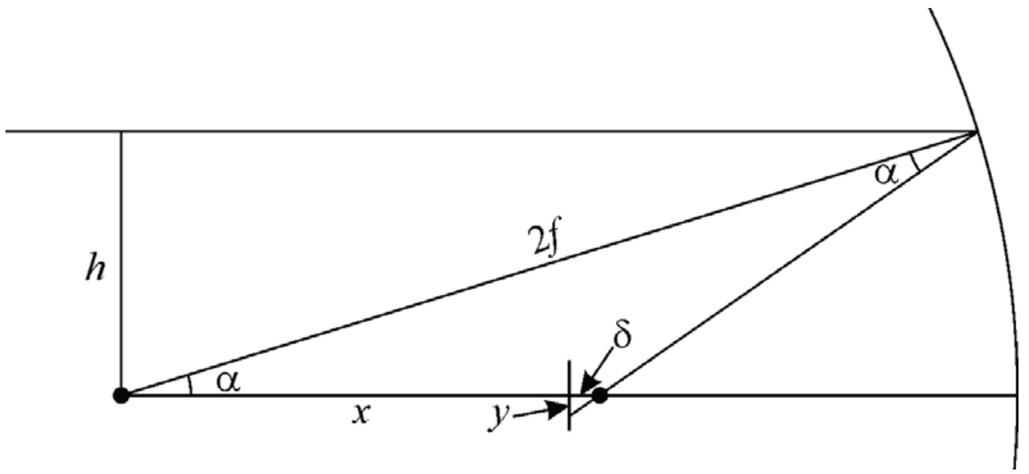
$$y = \delta \cdot \mathrm{tg}\,2\alpha = f\frac{\sin^2\alpha}{2}\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = f\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}.$$

Учтем, что угол α мал:

$$y = f\sin^3\alpha = \frac{h^3}{8f^2}.$$

Самое большое отклонение претерпит луч, попадающий на край зеркала, т.е. при $h = d/2$:

$$y_0 = f\sin^3\alpha = \frac{d^3}{64f^2}.$$



Эта величина, являющаяся радиусом кружка рассеяния, называется поперечной сферической аберрацией.

В то же время, точечный источник из-за дифракции будет виден в виде кружка (кружка Эйри) с угловым радиусом $\varphi = 1.22\,\lambda/d$. Таким образом, в фокальной плоскости получится кружок размером

$$r_d = f\varphi = 1.22\frac{f\lambda}{d}.$$

Чтобы кружок сферической аберрации был меньше дифракционного, должно выполняться условие:

$$1.22\frac{f\lambda}{d} > \frac{d^3}{64f^2}.$$

Отсюда имеем:

$$d < (1.22\cdot 64\cdot f^3\cdot\lambda)^{1/4}.$$

Для фокусного расстояния 1 м и длины волны 550 нм диаметр объектива должен быть не более 8 см.