

11 класс

Задача 1. Магнитные шары

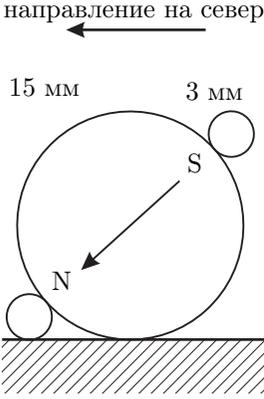


Рис. 10

1. Если взаимодействующие шары расположить недалеко друг от друга и при этом не препятствовать их свободному вращению, то их магнитные моменты выстроятся вдоль линии, соединяющей центры шаров. Такое расположение соответствует минимуму энергии магнитного взаимодействия шаров. Если шары отпустить, то они сцепятся противоположными полюсами.

Для определения северного и южного полюсов шара диаметром $d_5 = 15$ мм подцепим к его противоположным полюсам два маленьких 3-х миллиметровых шарика и положим его на поверхность стола. Расположим наш шар подальше от магнитных предметов и других магнитов. Шар под действием магнитного поля Земли развернётся так, что один из подцепленных маленьких магнитиков будет смотреть вверх, а другой — вниз (рис. 10). Нижний шарик соответствует северному, а верхний — южному полюсу большого шара. Это связано с тем, что Екатеринбург — город, где проходит олимпиада — находится в северном полушарии Земли, и силовые линии магнитного поля наклонены под углом к горизонту вниз. Пометим полюса магнита фломастером: синим цветом — северный полюс, красным — южный. Аналогичным образом определим и пометим полюса остальных шариков.

2. Снимем зависимость силы взаимодействия $F(r)$ шаров диаметром $d = 15$ мм от расстояния r между центрами шаров. Для этого соберём схему, показанную на рис. 11.

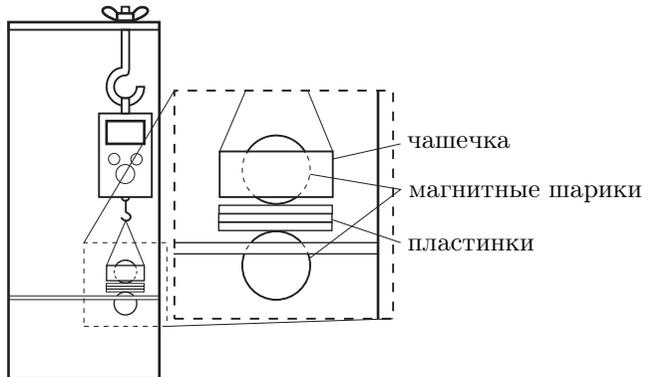
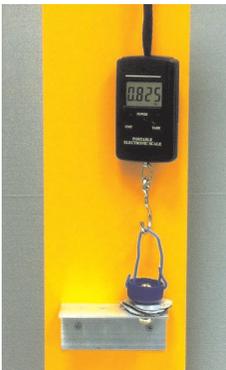


Рис. 11

Отверстия в чашке и уголке должны быть такими, чтобы шары соприкасались, причём соприкасались полюсами: сила притяжения шаров при этом будет максимальной. Силу притяжения измеряем с помощью весов следующим образом: вращая барашек крюка, опустим чашечку до заведомого соприкосновения верхнего шара с нижним. В этом случае часть силы сцепления магнитных шаров уравновешивается силой упругости шаров, а часть — натяжением весов. Будем медленно затягивать барашек, приподнимая чашечку. Сила упругости будет уменьшаться и достигнет нуля в момент отрыва верхнего шара от нижнего. В этот момент показания весов M максимальны. Дальнейшее поднятие чашки приведёт к увеличению расстояния между шарами и ослабевания магнитной силы. Таким образом, максимальные показания весов соответствуют силе взаимодействия шаров при их соприкосновении.

Для учёта веса чашки с шаром, подвешиваем шар с чашкой на весах вдали от магнитов и с помощью клавиши «TARE» обнуляем показание весов. Расстояние между шарами можно изменять, прокладывая между шарами разное количество пластин известной толщины, при этом так же будем записывать максимальные показания весов, соответствующие отрыву верхнего шара от пластин. Результаты измерений представлены в Таблице 1, где m — количество пластинок между шарами, $r = d + mh$ — расстояние между центрами шаров, M — показания весов, F — сила взаимодействия шаров, $r_0 = 1$ мм, $F_0 = 1$ гс¹.

Таблица 1. Зависимость $F(r)$.

| m | r , мм | M , кг | F , гс | r^{-4} , 10^{-6} мм ⁻⁴ | $\ln r/r_0$ | $\ln F/F_0$ |
|-----|----------|----------|----------|---------------------------------------|-------------|-------------|
| 0 | 15,0 | 2,800 | 2800 | 19,8 | 2,708 | 7,94 |
| 1 | 16,2 | 2,080 | 2080 | 14,5 | 2,785 | 7,64 |
| 2 | 17,4 | 1,520 | 1520 | 10,9 | 2,856 | 7,33 |
| 3 | 18,6 | 1,140 | 1140 | 8,4 | 2,923 | 7,04 |
| 4 | 19,8 | 0,865 | 865 | 6,5 | 2,986 | 6,76 |
| 5 | 21,0 | 0,680 | 680 | 5,1 | 3,045 | 6,52 |
| 6 | 22,2 | 0,540 | 540 | 4,1 | 3,100 | 6,29 |
| 7 | 23,4 | 0,430 | 430 | 3,3 | 3,153 | 6,06 |
| 8 | 24,6 | 0,350 | 350 | 2,7 | 3,203 | 5,86 |

Чтобы определить степень, построим график $F(r)$ в двойном логарифмическом масштабе (рис. 12). По наклону графика определим $n = -4,23 \pm 0,25$.

Найдём теоретическое значение n . Энергия взаимодействия двух сонаправленных точечных диполей P_1 и P_2 , ориентированных вдоль соединяющей их линии:

$$W = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_1 P_2}{r^3}.$$

¹В данном случае удобно пользоваться такой внесистемной единицей измерения как грамм-сила, гс. Сила в 1 гс соответствует весу 1 грамма.

Тогда сила их взаимодействия:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{P_1 P_2}{r^4}.$$

Знак «минус» означает, что шары притягиваются. Таким образом, теоретическое значение $n = -4$.

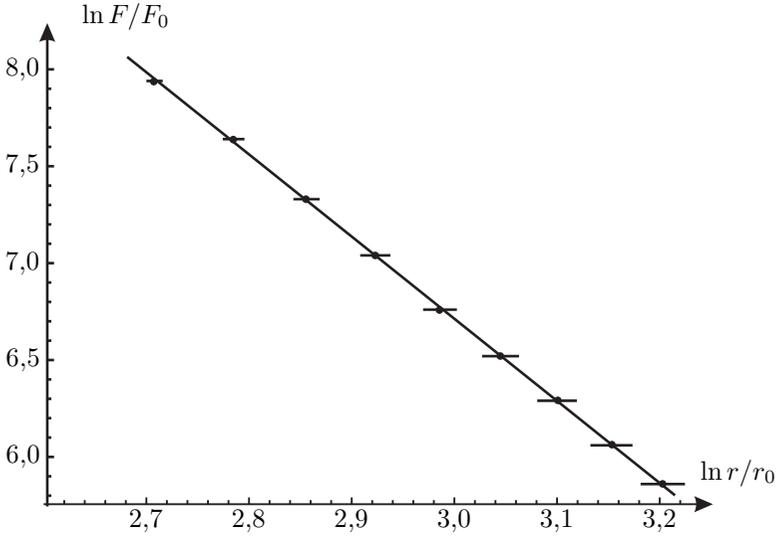


Рис. 12

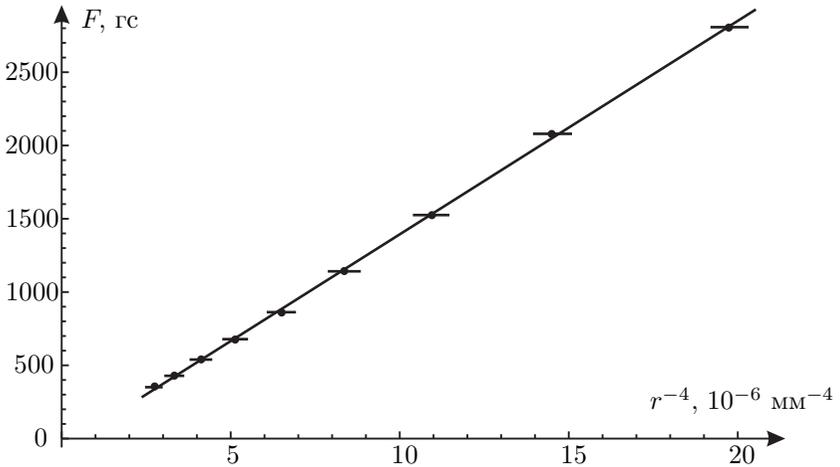


Рис. 13

Видно, что в пределах погрешности теоретическое значение n совпадает с экспериментальным, а значит, магнитные шары действительно взаимодействуют как жёсткие точечные диполи, расположенные в центрах шаров.

Соответствие теории эксперименту можно также показать, построив график зависимости $F(r^{-4})$ (рис. 13). Через экспериментальные точки можно провести прямую, проходящую через начало координат, что подтверждает совпадение теории с экспериментом в пределах погрешности.

3. Таким же методом измеряем максимальную силу сцепления одинаковых шаров. Максимальная сила будет достигаться при их касании разноимёнными полюсами. Данные приведены в таблице 2.

Таблица 2. Зависимость $F_{ii}(d)$

| i | d_i , мм | F_{ii} , гс | $\sqrt{F_{ii}}$, гс ^{1/2} |
|-----|------------|---------------|-------------------------------------|
| 1 | 3 | 113 | 10,6 |
| 2 | 5 | 305 | 17,5 |
| 3 | 7 | 630 | 25,1 |
| 4 | 10 | 1350 | 36,7 |
| 5 | 15 | 2800 | 52,9 |
| 6 | 20 | 430 | 20,7 |

Если предположить, что некоторые шары намагничены одинаково и взаимодействуют как точечные жёсткие диполи, то силы сцепления увеличиваются пропорционально квадрату диаметра:

$$F \sim \frac{P_m^2}{d^4} = \frac{(pV)^2}{d^4} \sim \frac{p^2 d^6}{d^4} = p^2 d^2.$$

Для проверки этой зависимости строим график зависимости в координатах (d, \sqrt{F}) . Видно, что точки, соответствующие шарам 1–5, лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, а точка, соответствующая шару 6, не лежит на этой прямой. Это означает, что намагничённость шаров 1–5 диаметрами $d_{1-5} = 3-15$ мм в пределах точности измерений одинакова, а намагничённость шарика диаметра $d_6 = 20$ мм заметно меньше.

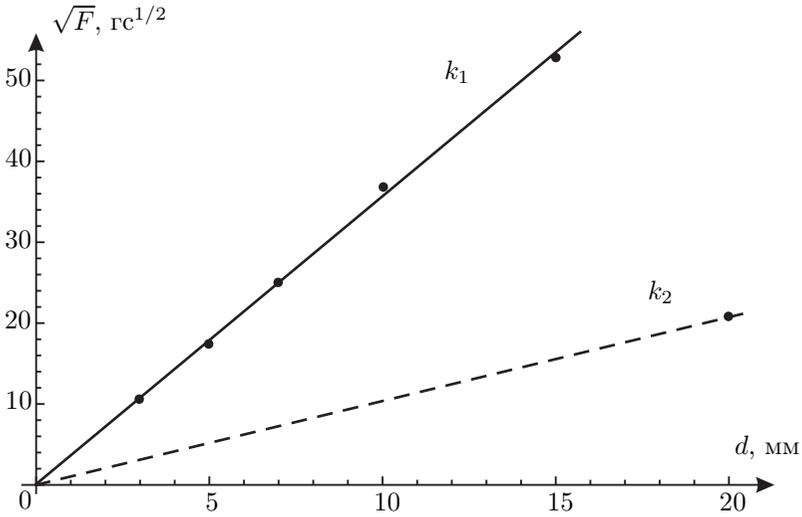


Рис. 14

4. Определим отношение намагниченностей p_{20}/p_{10} шариков $d_6 = 20$ мм и $d_4 = 10$ мм. Проще всего это сделать по графику в пункте 3, найдя отношение угловых коэффициентов построенных прямых:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{k_2}{k_1} = 0,285 \pm 0,010.$$

5. Найдём отношение полей B_{20}/B_{10} на полюсах магнитов с $d_6 = 20$ мм и $d_4 = 10$ мм. Величина магнитного поля на полюсе шара пропорциональна его намагниченности и не зависит от его радиуса $R = d/2$:

$$B \sim \frac{P_m}{R^3} = \frac{pV}{R^3} \sim p, \quad \text{тогда} \quad \frac{B_{20}}{B_{10}} = \frac{p_{20}}{p_{10}} = 0,285 \pm 0,010.$$

6. Измерим максимальные силы взаимодействия F_{ij} шаров разных диаметров. Результаты измерений представлены в таблице 3.

Таблица 3. Экспериментальные значения силы взаимодействия F_{ij} и их теоретические значения F_{ij}^t .

| $F_{ij}, \text{ Гс}$ $F_{ij}^t, \text{ Гс}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------------------------------------|-----|------------|------------|------------|--------------|--------------|
| 1 | 113 | 170 163 | 205 188 | 210 196 | 190 173 | 45 45 |
| 2 | | 305 | 420 414 | 505 507 | 540 520 | 175 148 |
| 3 | | | 630 | 895 866 | 1025 1000 | 315 307 |
| 4 | | | | 1350 | 1835 1792 | 660 602 |
| 5 | | | | | 2800 | 1135 1053 |
| 6 | | | | | | 430 |

7. Рассчитаем силу взаимодействия двух шаров разных диаметров d_i и d_j :

$$F_{ij} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} P_i P_j \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^{-4} \sim \frac{P_i P_j}{(d_i + d_j)^4}.$$

Для одинаковых шаров $i = j$ эта формула даёт:

$$F_{ii} \sim \frac{P_i^2}{16d_i^4}, \quad F_{jj} \sim \frac{P_j^2}{16d_j^4}.$$

Окончательно получим:

$$F_{ij} = \sqrt{F_{ii} F_{jj}} \frac{16d_i^2 d_j^2}{(d_i + d_j)^4}. \tag{2}$$

Эта формула позволяет теоретически выразить силу F_{ij} сцепления шаров разных диаметров через силы сцепления одинаковых шаров F_{ii} и F_{jj} .

8. Рассчитаем по формуле (2) теоретические значения F_{ij}^t и внесём их в таблицу 3. По таблице видно, что для большинства ячеек различие экспериментальных значений с расчётными не превышает 2–5 %, таким образом в пределах точности измерений эксперимент согласуется с теорией.