10 класс

10.5. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток. (*С. Волчёнков*)

Решение. Пусть сторона квадрата равна m. По условию, $m \cdot m = n \cdot k$. Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$; тогда $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, где $\text{НОД}(m_1, n_1) = 1$; при этом $m_1 m = n_1 k$. Первые сомножители в обеих частях последнего равенства взаимно просты, следовательно, m делится на n_1.

Это значит, что квадрат можно разделить на горизонтальные полосы шириной n_1 и на вертикальные полосы шириной d. При этом он разобьётся на равные прямоугольники из $n_1 d = n$ клеток, что и требовалось.

10.6. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k+1$? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что нашлась такая последовательность $a_1, a_2, a_2, \ldots$.

Пусть k — любое натуральное число, большее 1. Рассмотрим первые $2k-1$ членов последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_{2k-1}. По нашему предположению, сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-1}$ делится на $2k$, а каждая из сумм $a_2 + a_3 + \ldots + a_k$ и $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k-1}$ делится на k. Таким образом, получаем, что a_1 делится на k при всех k. Это невозможно.

10.7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Окружность, описанная около треугольника PMQ, пересекает прямую BC вторично в точке X. Докажите, что $BH = CX$. (*М. Дидин*)

Первое решение. Пусть P' и Q' — точки, симметричные соответственно точкам P и Q относительно M. Рассмотрим треугольник MQP'. В нём $QB \perp MP'$ по условию; кроме того, $PBP'C$ — параллелограмм, так что $P'B \parallel PC \perp QM$. Поэтому B — точка пересечения высот треугольника MQP', то есть $P'Q \perp MB$. Аналогично, $MC \perp PQ'$.

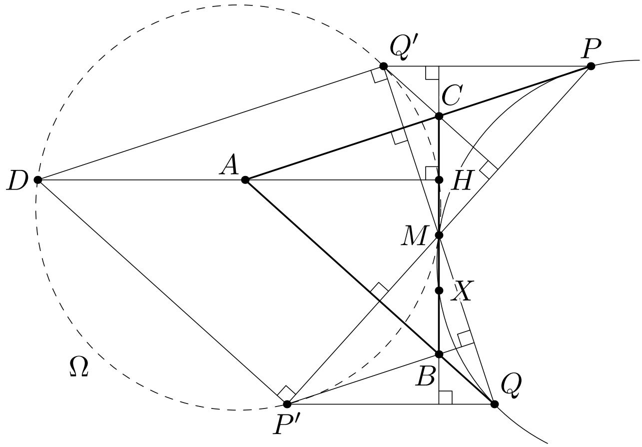

Рис. 2

Заметим, что $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{QP'}$, так как $PQP'Q'$ — параллелограмм. Отложим от A вектор $\overrightarrow{AD}$, равный этим двум векторам. Тогда $P'D \parallel AQ \perp MP'$, $Q'D \parallel AP \perp MQ'$ и $DH \perp MH$. Значит, точки P', Q' и H лежат на окружности Ω с диаметром DM. При симметрии относительно M окружность Ω переходит в окружность Ω', описанную около треугольника PMQ. При этом точка H, лежащая на Ω, переходит во вторую точку пересечения Ω' и BC, то есть в X. Отсюда и следует, что $BH = CX$.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, построим точки P' и Q', симметричные соответственно точкам P и Q относительно M. Тогда прямые $P'B$ и $Q'C$ симметричны относительно M прямым PC и QB соответственно. Значит, прямые $P'B$ и $Q'C$ пересекаются в точке A', симметричной A относительно M.

Пусть $P'M$ и $Q'M$ пересекают соответственно стороны AB и AC в точках S и T (см. рис. 3). Применим к треугольникам $P'SB$ и $Q'TC$ теорему Дезарга. Точки пересечения пар прямых $P'S$ и $Q'T$, $P'B$ и $Q'C$, BS и CT лежат на одной прямой; значит, прямые $P'Q'$, ST и BC пересекаются в одной точке или попарно параллельны. Последний случай невозможен, иначе треугольник ABC был бы равнобедренным.

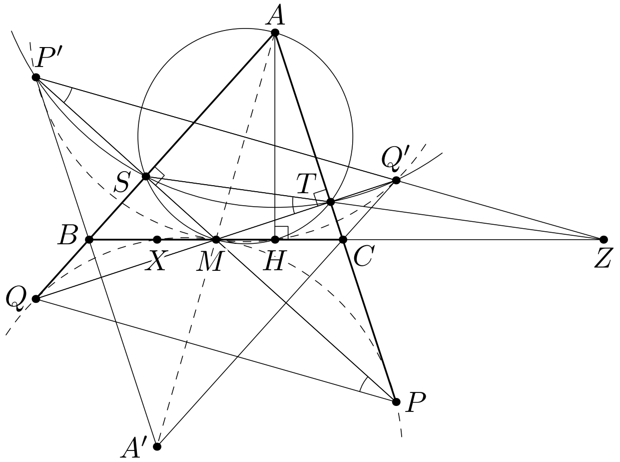

Рис. 3

Пусть Z — общая точка прямых $P'Q'$, ST и BC. Поскольку $\angle PSQ = \angle PTQ = 90^\circ$, точки P, Q, S, T лежат на одной окружности, то есть $\angle QPM = \angle QTS$. Значит, $\angle Q'P'M = \angle QPM = \angle QTS$, то есть и точки P', Q', S, T также лежат на одной окружности; отсюда $ZP' \cdot ZQ' = ZT \cdot ZS$. С другой стороны, точки A, M, S, T, H лежат на окружности с диаметром AM; значит, $ZS \cdot ZT = ZM \cdot ZH$. Отсюда получаем $ZP' \cdot ZQ' = ZT \cdot ZS = ZM \cdot ZH$. Это означает, что точки P', Q', M, H лежат на одной окружности. Эта окружность симметрична окружности, описанной около PMQ, относительно M. Отсюда и следует требуемое.

10.8. У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых — разные, причём любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету? (*С. Берлов, И. Богданов*)

Ответ. 70.

Решение. 1. Покажем, что за 70 взвешиваний нумизмат сможет найти настоящую монету. Сложим все 100 монет в кучу. Каждым взвешиванием он будет выбирать две монеты из кучи и сравнивать их. Если их массы равны, то обе монеты настоящие, и требуемая монета найдена. Если же нет, то более тяжёлая монета — фальшивая, и её можно выбросить из кучи.

Через 70 таких взвешиваний, если равенства никогда не будет, то в куче останется 30 монет, причём все настоящие останутся в куче. Значит, в этом случае нумизмат даже найдёт все 30 настоящих монет.

2. Предположим теперь, что у нумизмата есть алгоритм, позволяющий гарантированно найти настоящую монету не более, чем за 69 взвешиваний. Мы покажем, что это невозможно — даже в предположении, что массы монет таковы: масса настоящей равна 2^{100}, а масса i-й фальшивой равна $m_i = 2^{100} + 2^i$.

При таком предположении результат любого взвешивания можно определить так. Пусть при некотором взвешивании на чашках по k монет, среди которых $d > 0$ фальшивых, имеющих номера $i_1 < i_2 < \ldots < i_d$. Тогда на чашке, на которой лежит самая тяжёлая монета, суммарная масса не меньше $k2^{100} + 2^{i_d}$, а суммарная масса на другой чашке не больше $k2^{100} + (2^1 + \ldots + 2^{i_d - 1}) = k2^{100} + 2^{i_d} - 1$. Значит, если на чашках есть хотя бы одна фальшивая монета, то перевесит чашка, на которой лежит фальшивая с наибольшим номером.

Итак, пусть нумизмат действует по своему алгоритму. Мы будем сообщать ему результаты взвешиваний и присваивать некоторым монетам массы m_i. При этом после каждого взвешивания присвоенными окажутся веса $m_{70}, m_{69}, \ldots, m_{70-i}$ при некотором i. Далее, если соответствующие монеты действительно имеют такие массы (а остальные массы распределены как угодно), то результаты взвешиваний будут такими, как мы сообщили.

При первом взвешивании выберем любую монету на чашках, присвоим ей массу m_{70} и сообщим, что чашка с ней тяжелее. При каждом следующем взвешивании, если на весах уже присутствует монета с присвоенной массой, то мы просто выберем из таких масс наибольшую и сообщим, что чашка с соответствующей монетой перевесила. Если же никакой монете на весах масса ещё не присвоена, то мы опять выберем любую монету на чашках, присвоим ей наибольшую ещё не присвоенную массу и сообщим, что чашка с ней тяжелее. Нетрудно видеть, что при этом требуемые условия соблюдаются.

Если нумизмат совершил не более 69 взвешиваний, то не более 69 масс окажутся присвоенными. В частности, m_1 присвоенной не будет. Значит, массу m_1 может иметь любая монета, которой масса ещё не присвоена, и при этом все результаты взвешиваний останутся такими, как мы сообщили. Поэтому нумизмат не сможет указать на заведомо настоящую монету.

Замечание. Ответ в задаче не изменится, если убрать условие равенства количеств монет на чашках.