Условие

К двум лёгким подвижным блокам подвешены грузы, массы которых m_1 и m_2. Лёгкая нерастяжимая нить, на которой висит блок с грузом m_1, образует с горизонтом угол α. Грузы удерживают в равновесии (рис. 15). Найдите ускорение грузов сразу после того, как их освободят. Считайте, что радиусы блоков $r \ll L$.

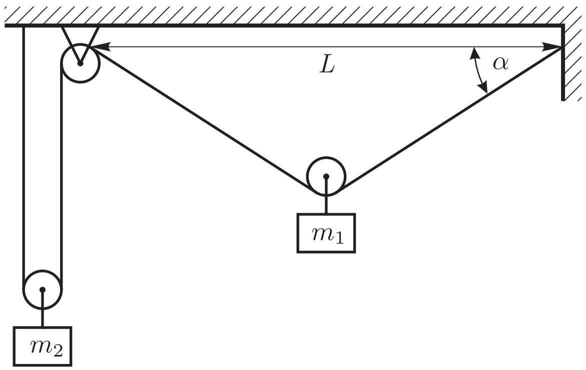

Рис. 15

Примерные критерии оценивания

Записан второй закон Ньютона для груза №1 2
Записан второй закон Ньютона для груза №2 2
Указана связь между малыми смещениями грузов 2
Обоснован переход от выражения (9) к выражению (10) 1
Записано выражение для связи ускорений (10) 1
Правильный ответ для a_1 1
Правильный ответ для a_2 1

Возможное решение

Так как нить и блоки лёгкие, натяжение верёвки T всюду одинаково. Для груза №1 запишем в проекции на вертикальную ось, направленную вниз, второй закон Ньютона:

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T \sin\alpha.$$

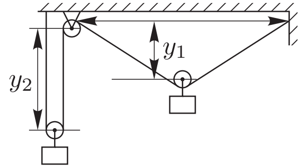

Рис. 16

Для груза № 2 второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось даст:

$$m_2 a_2 = m_2 g - 2T.$$

Поскольку нить нерастяжимая, малое смещение по вертикали Δy_1 груза № 1 (рис. 16) и малое смещение по вертикали Δy_2 груза № 2 (рис. 17) связаны соотношением:

$$2\Delta y_1 \sin\alpha + 2\Delta y_2 = 0. \quad (9)$$

Рассматривая эти смещения за малый промежуток времени Δt, получаем выражение, связывающее скорости грузов:

$$v_1 \sin\alpha + v_2 = 0.$$

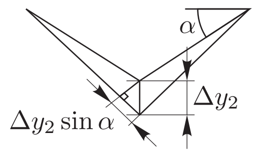

Рис. 17

Найдём связь между малыми изменениями скоростей:

$$\Delta(v_1 \sin\alpha) + \Delta v_2 = \Delta v_1 \sin\alpha + v_1 \Delta(\sin\alpha) + \Delta v_2 = 0.$$

Так как в начальный момент времени скорости грузов равны нулю, то эти изменения скоростей связаны соотношением:

$$\Delta v_1 \sin\alpha + \Delta v_2 = 0.$$

Отсюда следует такая же связь между ускорениями грузов:

$$a_1 \sin\alpha + a_2 = 0. \quad (10)$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$a_1 = g\frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}, \quad a_2 = -g\sin\alpha\frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}.$$

Условие

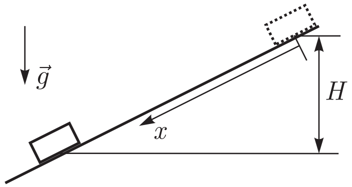

Рис. 18

Небольшой груз соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости. Известно, что коэффициент трения между грузом и плоскостью меняется по закону:

$$\mu(x) = \alpha x,$$

где x — расстояние вдоль плоскости от начального положения груза. Опустившись на высоту H по вертикали (рис. 18), груз останавливается. Найдите максимальную скорость груза в процессе движения.

Примерные критерии оценивания

Указано, что скорость максимальна, когда равнодействующая сила равна нулю 2

Указано как найти работу силы при её линейном изменении 2

Получено, что скорость максимальна, когда тело прошло половину пути ... 2

Записан закон сохранения энергии при перемещении тела из точки $x = 0$ в точку $x = x_0$ 2

Получен ответ 2

Возможное решение

Если груз находится в точке x, то проекция равнодействующей силы на ось x равна:

$$F_x = mg\sin\varphi - \alpha x mg\cos\varphi,$$

где φ — угол наклона плоскости. Скорость будет максимальной когда $F_x = 0$, в этот момент координата груза равна $x_0 = (\operatorname{tg}\varphi)/\alpha$.

При перемещении груза на расстояние L сила трения линейно возрастает от нуля до некоторого максимального значения $\alpha L \cdot mg\cos\varphi$. Тогда модуль работы силы трения можно найти как произведение силы $(\alpha L mg\cos\varphi)/2$ на пройденный путь L.

Потенциальная энергия груза идёт на работу силы трения:

$$mgH = \frac{\alpha L^2 mg\cos\varphi}{2} = \frac{\alpha H^2 mg\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} = \frac{\alpha H^2 mg}{2\sin\varphi}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\varphi} = mg\frac{H^2}{2x_0\sin\varphi}.$$

Откуда получаем, что $x_0 = H/(2\sin\varphi)$.

Запишем закон сохранения энергии при перемещении из точки $x = 0$ в точку $x = x_0$:

$$\frac{mgH}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot mgx_0\sin\varphi = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgH}{4}.$$

Откуда

$$v = \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

Альтернативное решение

Построим график (рис. 19) проекции равнодействующей силы на ось X от перемещения x. Работа равнодействующей силы равна нулю, так как кинетическая энергия в конце и в начале одинакова и равна нулю. Из этого следует, что работа по разгону тела (соответствует площади треугольника над осью x) равна по модулю работе по торможению тела (площадь треугольника под осью x). Эти треугольники равны, поэтому график пересекает ось x в точке $L/2$. Работа равнодействующей силы по разгону тела (верхний треугольник) равна изменению кинетической энергии $mv^2/2$. Площадь верхнего треугольника есть половина площади прямоугольника. Площадь прямоугольника численно равна работе силы тяжести при опускании груза на $H/2$. Отсюда получаем равенство $mv^2/2 = mgH/4$, из которого получается ответ.

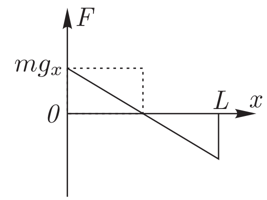

Рис. 19

Условие

Рабочим телом тепловой машины является идеальный одноатомный газ. Цикл состоит из изобарного расширения (1, 2), адиабатического расширения (2, 3) и изотермического сжатия (3, 1). Модуль работы при изотермическом сжатии равен A_{31}. Определите, чему может быть равна работа газа при адиабатическом расширении A_{23}, если у указанного цикла КПД $\eta \leqslant 40\%$?

Примерные критерии оценивания

Определены участки, где подводится и отводится теплота, записано выражение для КПД 2

Из уравнения состояния идеального газа получено выражение для изобарного процесса $p\Delta V_{12} = \nu R \Delta T_{12}$ 2

Указано, что работа на изобаре $A_{12} = p\Delta V_{12}$, изменение внутренней энергии одноатмного газа $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{12}$ 1

Получено выражение (11) 3

Проведён анализ выражения (11) и получен ответ 2

Возможное решение

В данном цикле теплота подводится на участке (1, 2), отводится на (3, 1). Тогда КПД равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}}.$$

Поскольку на изотерме изменение внутренней энергии равно нулю, то $Q_{31} = A_{31}$. Получим выражение для Q_{12}:

$$Q_{12} = \frac{Q_{31}}{1-\eta} = \frac{A_{31}}{1-\eta}.$$

Воспользуемся первым началом термодинамики и тем, что газ идеальный одноатомный:

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = p\Delta V_{12} + \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{12} = \frac{5}{3}\Delta U_{12}.$$

Процесс (2, 3) адиабатический (теплота не подводится, работа совершается за счёт уменьшения внутренней энергии), и изменение внутренней энергии в цикле равно нулю, поэтому:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{31} = \Delta U_{12} + 0 = \Delta U_{12}.$$

Выражаем работу при адиабатическом расширении A_{23} через работу на изотерме A_{31} и КПД η:

$$A_{23} = \Delta U_{12} = \frac{3}{5}Q_{12} = \frac{3}{5(1-\eta)}A_{31}. \qquad (11)$$

КПД принимает значения $\eta \in (0, 0{,}4]$, поэтому работа при адиабатическом расширении A_{23} принимает значения:

$$\frac{3}{5}A_{31} < A_{23} \leqslant A_{31}.$$

Условие

Теоретик Баг предложил экспериментатору Глюку определить схему электрического «чёрного» ящика (ЧЯ) с двумя выводами. В ящике находятся два одинаковых диода и два разных резистора. Вольтамперная характеристика (ВАХ) «чёрного» ящика приведена на рис. 20, а ВАХ диода – на рис. 21.

Восстановите схему ЧЯ и определите сопротивление каждого из резисторов.

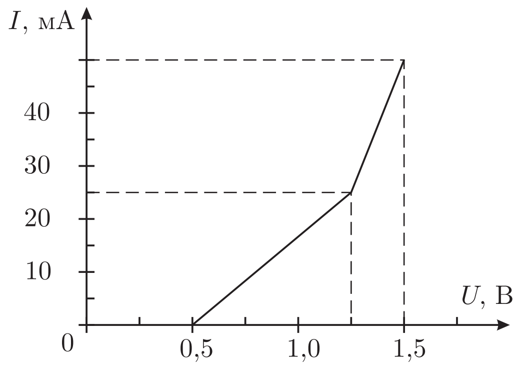

Рис. 20

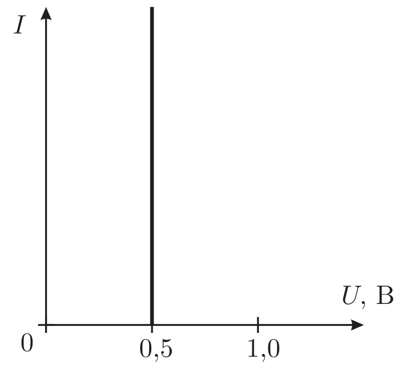

Рис. 21

Примерные критерии оценивания

Сделан вывод о том, что один из диодов подключен последовательно к остальной цепи 2
Показано, что схема 1 — единственная возможная 3
Найдено суммарное сопротивление $R_{1,2}$ 2
Найдено сопротивление R_1 2
Найдено сопротивление R_2 1

Возможное решение

Поскольку на ВАХ присутствуют два излома, то в цепи два диода включены последовательно. Так как ток через ЧЯ начинает течь при достижении напряжения 0,5 В, следует считать, что к одному из диодов параллельно не подключены резисторы. Для удобства дальнейшего анализа, перерисуем ВАХ чёрного ящика, исключив из неё участок с одиночным диодом. Получим характеристику, изображенную на рис. 22. Так как теперь ВАХ содержит излом, а сила тока линейно зависит от напряжения, мы можем сделать вывод, что в цепи есть резистор, включенный параллельно диоду (схема на рис. 23) или диоду с последовательно соединенным с ним резистором (схема на рис. 24).

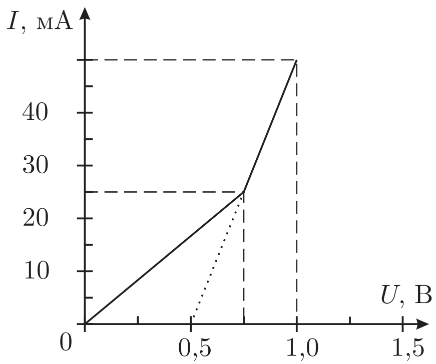

Рис. 22

Вторая схема не соответствует фрагменту цепи ЧЯ, так излом ВАХ происходит при напряжении большем, чем напряжение открытия $U_0 = 0{,}5$ В. Таким образом остается проанализировать первую схему.

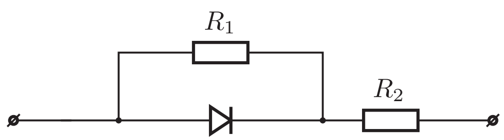

Рис. 23

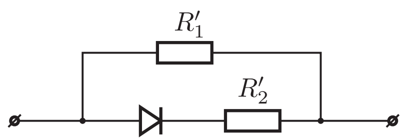

Рис. 24

Пока диод закрыт, сила тока в цепи пропорциональна напряжению, а коэффициент пропорциональности найдем, взяв напряжение и силу тока для точки излома ВАХ:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 = (750 \text{ мВ}/25 \text{ мА}) = 30 \text{ Ом}.$$

В момент открытия диода, напряжение на нём, а значит и на резисторе R_1, будет равно $U_0 = 0{,}5$ В. Значит:

$$R_1 = (500 \text{ мВ}/25 \text{ мА}) = 20 \text{ Ом}.$$

Сопротивление резистора $R_2 = R_{1,2} - R_2 = 10$ Ом. Изобразим цепь ЧЯ и укажем на ней значения сопротивлений резисторов (рис. 25).

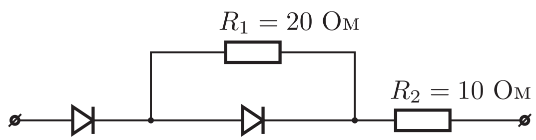

Рис. 25

Условие

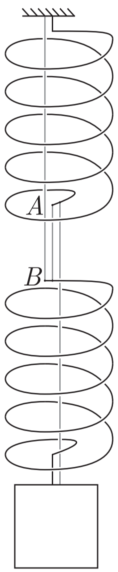

Рис. 26

На двух легких одинаковых пружинах, соединенных нитью AB, висит груз массы m. Жесткость каждой пружины k. Между витками пружины протянули еще две нити: одну прикрепили к потолку и к верхнему концу B нижней пружины, а вторую к грузу и нижнему концу A верхней пружины (рис. 26). Эти две нити не провисают, но и не натянуты. Нить AB перерезали. Через некоторое время система пришла к новому положению равновесия. Найдите изменение потенциальной энергии системы.

Примерные критерии оценивания

Найдено растяжение каждой пружины вначале 1
Найдена начальная потенциальная энергия пружин 1
Найдено конечное растяжение каждой пружины 1
Найдена конечная потенциальная энергия пружин 1
Найдена высота подъёма груза 3
Записано изменение потенциальной энергии груза в поле тяжести 1
Получен конечный ответ для изменение потенциальной энергии системы ... 2

Возможное решение

В начальный момент (до перерезания нити AB) кинетическая энергия системы была равна нулю. После того, как нить AB перерезали, и колебания прекратились, кинетическая энергия вновь оказалась равной нулю. Потенциальная же энергия, связанная с деформацией пружин, и с взаимодействием груза с Землей, изменилась. Потенциальная энергия двух пружин, каждая и которых растянута силой mg на величину $\Delta x_1 = \dfrac{mg}{k}$, равна

$$E_{\text{п},1} = 2 \cdot \frac{k\Delta x_1^2}{2} = \frac{(mg)^2}{k}.$$

После перерезания нити AB, пружины оказались соединенными параллельно. Груз приподнялся. Теперь каждая из пружин растянута на вдвое меньшую длину:

$$\Delta x_2 = \frac{mg}{2k}.$$

Потенциальная энергия пружин после перерезания нити:

$$E_{\text{п},2} = 2 \cdot \frac{k\Delta x_2^2}{2} = \frac{(mg)^2}{4k}.$$

После перерезания нити груз поднимется на высоту

$$\Delta h = \Delta x_1 - \Delta x_2 = \frac{mg}{2k}.$$

Изменение потенциальной энергии груза в поле тяжести равно

$$\Delta E_{\text{т}} = mg\Delta h = \frac{(mg)^2}{2k}.$$

В итоге потенциальная энергия системы изменится на:

$$\Delta E = E_{\text{п},2} - E_{\text{п},1} + \Delta E_{\text{т}} = -\frac{(mg)^2}{4k}.$$

Знак минус говорит о том, что потенциальная энергия уменьшится.