

## 7 класс

**7.1.** Запишите несколько раз подряд число 2013 так, чтобы получившееся число делилось на 9. Ответ объясните.

**Ответ:** например, 201320132013.

**Решение.** Приведем несколько способов обоснования.

*Первый способ.* Сумма цифр записанного числа равна  $(2 + 0 + 1 + 3) \cdot 3 = 18$ , поэтому оно делится на 9 (по признаку делимости на 9).

*Второй способ.* Сумма цифр числа 2013 делится на 3, поэтому, если написать 2013 подряд 3 раза, то сумма цифр полученного числа будет делиться на  $3 \cdot 3 = 9$ , значит, и само число будет делиться на 9 (по признаку делимости на 9).

*Третий способ.* Разделив записанное число на 9, получим:  $201320132013 : 9 = 22368903557$ .

*Четвертый способ.* Разделив записанное число на 3, получим:  $201320132013 : 3 = 67106710671$ . Полученное число делится на 3, так как сумма его цифр равна 42. Следовательно, исходное число делится на 9.

*Существуют и другие примеры: можно записать число 2013 шесть раз подряд, девять раз подряд, и так далее (любое количество раз, кратное трем). Обоснования аналогичны приведенным выше.*

**Критерии проверки:**

- + приведены один или несколько верных вариантов ответа и даны верные объяснения
- ± вместе с верным ответом указан и неверный, при этом верный ответ объяснен
- ∓ верный ответ приведен без объяснений или с неверным объяснением
- приведен только неверный ответ

**7.2.** Высота комнаты — 3 метра. При ее ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол. Может ли площадь пола этой комнаты быть больше, чем 10 квадратных метров? Ответ объясните.

**Ответ:** нет, не может.

**Решение.** Приведем несколько способов обоснования.

*Первый способ.* Так как на каждую стену уходит краски больше, чем на пол, то площадь пола меньше, чем площадь каждой из стен. Площадь пола равна произведению ширины комнаты и ее длины, а площадь одной из стен равна произведению ширины комнаты и ее высоты. Поэтому длина комнаты меньше ее высоты, то есть меньше, чем 3 метра. Аналогично и ширина комнаты меньше, чем 3 метра. Поэтому площадь комнаты меньше, чем  $9 \text{ м}^2$ , значит, она меньше, чем  $10 \text{ м}^2$ .

*Это рассуждение может быть записано алгебраически. Пусть  $a$  и  $b$  — длина и ширина комнаты (в метрах). Тогда площадь комнаты равна  $ab$ , а площади стен равны  $3a$  и  $3b$ . Из условия задачи следует, что  $ab < 3a$  и  $ab < 3b$ , то есть  $a < 3$  и  $b < 3$ . Значит,  $ab < 9 < 10$ .*

*Второй способ.* Комната — это прямоугольный параллелепипед высотой 3 метра. Положим этот параллелепипед на одну из боковых граней; тогда новой высотой станет одна из сторон прежнего основания, например, длина исходного параллелепипеда. При этом объем параллелепипеда не изменится, а площадь нового основания будет больше площади первоначального основания. Поэтому высота перевернутого параллелепипеда меньше, чем 3 метра. Положив теперь параллелепипед на соседнюю боковую грань и проведя аналогичные рассуждения, получим, что в этом случае новой высотой параллелепипеда станет ширина исходного и она также меньше, чем 3 метра. Таким образом, как длина, так и ширина исходного параллелепипеда меньше, чем 3 метра, значит, площадь его основания меньше, чем  $9 \text{ м}^2$ .

**Критерии проверки:**

- + приведен верный ответ с полным обоснованием
- ± приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности
- ∓ приведен верный ответ без обоснований
- приведен неверный ответ

**7.3.** Вчера Саша варил суп и положил мало соли, суп пришлось досаливать. Сегодня он положил соли в два раза больше, но все равно суп пришлось досаливать, правда, уже вдвое меньшим количеством соли, чем вчера. Во сколько раз Саше нужно увеличить сегодняшнюю порцию соли, чтобы завтра не пришлось досаливать? (Каждый день Саша варит одинаковые порции супа.)

**Ответ:** в 1,5 раза.

**Решение.** Приведем два способа решения: «арифметический» и «алгебраический».

*Первый способ.* Увеличение количества соли вдвое скомпенсировало половину вчерашней добавки, следовательно, вчерашнее количество соли, которое Саша положил первоначально, составляет треть от необходимого. Значит, сегодняшнее количество соли, которое Саша положил первоначально, составляет две трети от необходимого. Следовательно, завтра надо положить еще в полтора раза больше.

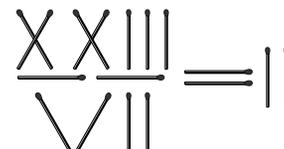
*Второй способ.* Пусть вчера Саша положил в суп  $x$  г соли, а добавил —  $y$  г. Тогда сегодня он положил  $2x$  г, а добавил —  $0,5y$  г. По условию:  $x + y = 2x + 0,5y$ , то есть  $x = 0,5y$ . Таким образом, всего требуется

положить  $2x + 0,5y = 3x$  г соли, а сегодня Саша положил  $2x$  г. Следовательно, сегодняшнюю порцию соли надо увеличить в  $3x : 2x = 1,5$  раза.

**Критерии проверки:**

- + приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием
- ± приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но ответ дан не на тот вопрос, который задан
- ∓ приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не обосновано, что он единственный
- ∓ верный ответ получен рассмотрением конкретных числовых значений
- приведен только ответ

**7.4.** Из спичек выложено неверное равенство (см. рисунок). Покажите, как переложить одну спичку, чтобы получилось равенство, в котором значения левой и правой частей различаются меньше, чем на  $0,1$ .



**Ответ:** см., например, рис. 7.4а, б.

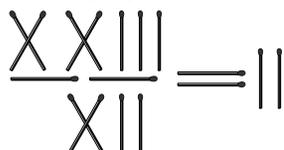


Рис. 7.4а

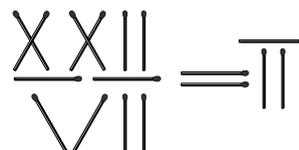


Рис. 7.4б

**Решение.** В равенстве на рис. 7.4а значение левой части равно  $\frac{23}{12}$ , а значение правой части равно 2.  $2 - \frac{23}{12} = \frac{1}{12} < 0,1$ . В равенстве на рис. 7.4б значение левой части равно  $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$ , а справа — стилизованная запись числа  $\pi = 3,1415\dots$ . Эти числа различаются меньше, чем на  $0,002$ , что существенно меньше требуемого.

Отметим, что приближение числа  $\pi$  дробью  $\frac{22}{7}$  было известно еще Архимеду. Оно является одним из «наилучших приближений», то есть любое приближение числа  $\pi$  в виде обыкновенной дроби с большей точностью имеет знаменатель, больше чем 7.

**Критерии проверки:**

- + приведены один или несколько верных вариантов ответа
- ± вместе с верным вариантом ответа указан и неверный
- приведен неверный ответ

**7.5.** В сумме  $+1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$  можно вычеркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «-». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно 1, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно 2, затем (снова начав сначала) получить 3, и так далее. До какого наибольшего целого числа ей удастся это сделать без пропусков?

**Ответ:** до числа 1093 (включительно).

**Решение.** Число 1 получается вычеркиванием всех слагаемых, кроме первого. Затем Маша сможет получить числа  $2 = -1 + 3$ ,  $3 = +3$  и  $4 = +1 + 3$ .

Покажем, что добавив слагаемое 9, можно получить любое целое число от  $5 = 9 - 4$  до  $13 = 9 + 4$ . Действительно,  $5 = -1 - 3 + 9$ ;  $6 = -3 + 9$ ;  $7 = +1 - 3 + 9$ ;  $8 = -1 + 9$ ;  $9 = +9$ ;  $10 = +1 + 9$ ;  $11 = -1 + 3 + 9$ ;  $12 = +3 + 9$ ;  $13 = +1 + 3 + 9$ .

Добавив 27 и действуя аналогично, можно получить любое целое число от  $14 = -1 - 3 - 9 + 27$  до  $40 = +1 + 3 + 9 + 27$ , затем получить все числа от  $41 = -1 - 3 - 9 - 27 + 81$  до  $121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$  и так далее. Следовательно, Маша постепенно сумеет получить все целые числа от 1 до  $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1093$ .

По сути, в этом решении использовано рассуждение по индукции. Вначале получено несколько первых чисел, а затем показано, что, умея получать все целые числа от 1 до  $k$  и добавляя следующее слагаемое, равное  $2k + 1$ , Маша сумеет получить все целые числа от  $k + 1 = (2k + 1) - k$  до  $3k + 1 = (2k + 1) + k$ .

Заметим, что слагаемые в заданной сумме являются последовательными степенями числа 3, то есть в троичной системе счисления эта сумма записывается в виде  $1111111_3$ . Предложенная задача на конкретном примере иллюстрирует тот факт, что любое целое число можно записать в виде суммы степеней тройки с коэффициентами 0, 1 и  $-1$  вместо обычных 0, 1 и 2. (Можно доказать, что запись в таком виде также единственна.)

**Критерии проверки:**

- + приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием
- ± приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но при записи ответа допущена арифметическая ошибка
- ∓ приведен верный ответ и присутствует идея его обоснования, но само обоснование отсутствует
- приведен только ответ