10 класс

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

(*Р. Женодаров*)

Ответ. 17.

Решение. Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев её соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда её соседка *слева* была в синем платье.

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

Замечание. Имеются другие (более сложные) обоснования того, что в хороводе ровно 17 девочек, ответивших «да».

Комментарий. Только ответ (без обоснования, либо полученный рассмотрением частных случаев расстановки) — 1 балл.

За попытки обоснования, в которых рассмотрены не все варианты расположения девочек, дополнительные баллы не начисляются.

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ — составное.

(*В. Сендеров*)

Решение. Достаточно показать, что хотя бы одно из двух чисел $d_a = \text{НОД}(a, c)$ и $d_b = \text{НОД}(b, c)$ больше 1. Действительно, если, например, $d_a > 1$, то $a+c$ делится на d_a и $a+c > d_a$, значит, $a + c$ — составное число.

Из равенства $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ следует $c(a + b) = ab$, значит, ab делится на c. Но тогда, если $d_a = d_b = 1$, то и $c = 1$, что невозможно по условию. Итак, одно из чисел d_a и d_b больше 1, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что если натуральные a, b, c удовлетворяют равенству $1/a+1/b=1/c$, то число $a+b$ также составное.

Комментарий. Доказано, что одно из чисел d_a и d_b больше единицы — 5 баллов.

Если задача сведена к утверждению, что одно из чисел d_a и d_b больше единицы, но само это утверждение не доказано — 2 балла.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, а O_1 и O_2 — их центры. Если $r_1=r_2$, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки пересечения прямых O_1O_2 и C_1C_2, и их площади равны.

Предположим, что $r_1\neq r_2$; пусть для определенности $r_1<r_2$. Тогда лучи A_2A_1 и B_2B_1 пересекаются в некоторой точке S. Обозначим через P и Q точки пересечения прямой c с прямыми a и b соответственно. Мы докажем, что 1) $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{r_1}{r_2}$, и 2) высоты h_1 и h_2 треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, проведённые из вершин C_1 и C_2 соответственно, равны. Отсюда будет следовать, что $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}=\frac{A_1B_1\cdot h_1/2}{A_2B_2\cdot h_2/2}=\frac{r_1}{r_2}$, что и требуется.

1) Прямоугольные треугольники SA_1O_1 и SA_2O_2 подобны, значит, $\frac{SA_1}{SA_2}=\frac{r_1}{r_2}$. Следовательно, равнобедренные треугольники SA_1B_1 и SA_2B_2 подобны с коэффициентом r_1/r_2, откуда и следует нужное утверждение.

2) Обозначим проекции точек B_1, C_1, B_2, C_2, P и Q на линию центров O_1O_2 через B_1', C_1', B_2', C_2', P' и Q' соответственно (проекциями точек A_1 и A_2 на O_1O_2 также являются B_1' и B_2').

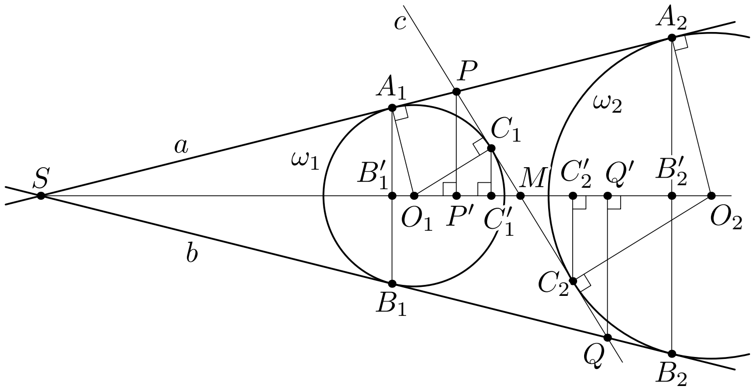

Рис. 3

Заметим, что длины отрезков $B_1'C_1'$ и $B_2'C_2'$ равны h_1 и h_2 соответственно.

Из равенства отрезков касательных к ω_1 имеем $SP + PQ - SQ = (SA_1 + PA_1) + (PC_1 + QC_1) - (SB_1 + QB_1) = 2PA_1 = 2PC_1$. Аналогично, из равенства отрезков касательных к ω_2 получаем $SP+PQ-SQ = (SA_2-PA_2)+(PC_2+QC_2)-(SB_2 - QB_2) = 2QB_2 = 2QC_2$. Отсюда следует, что $PA_1 = PC_1 = QB_2 = QC_2$.

Пусть прямая c пересекает O_1O_2 в точке M. Положим $\alpha = \angle PSM = \angle QSM$, $\beta = \angle SMP = \angle O_2MQ$. Имеем $B_1'C_1' = B_1'P'+P'C_1' = A_1P\cos\alpha+PC_1\cos\beta = B_2Q\cos\alpha+QC_2\cos\beta = B_2'Q'+Q'C_2' = B_2'C_2'$, то есть $B_1'C_1' = B_2'C_2'$, что и требовалось.

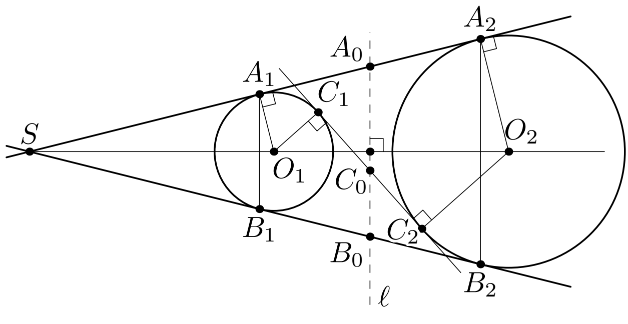

Рис. 4

Замечание. При доказательстве части 1) можно воспользоваться гомотетией с центром в точке S.

Часть 2) можно доказывать и по-другому. Достаточно доказать, что середины A_0, B_0 и C_0 отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой ℓ (эта прямая называется *радикальной осью окружностей* ω_1 *и* ω_2, см. рис. 4). Действительно, тогда $\ell \perp O_1O_2$, и точки B_1', C_1' будут симметричны соответственно точкам B_2' и C_2' относительно ℓ, откуда сразу следует $B_1'C_1' = B_2'C_2'$.

Условие $A_0C_0 \perp O_1O_2$ равносильно равенству $O_1A_0^2 - O_2A_0^2 = O_1C_0^2 - O_2C_0^2$, или $(r_1^2 + A_1A_0^2) - (r_2^2 + A_2A_0^2) = (r_1^2 + C_1C_0^2) - (r_2^2 + C_2C_0^2)$. Последнее равенство верно, так как $A_1A_0 = A_2A_0$ и $C_1C_0 = C_2C_0$. Аналогично $B_0C_0 \perp O_1O_2$, что и означает, что A_0, B_0 и C_0 лежат на одной прямой, перпендикулярной O_1O_2.

Комментарий. Доказана только часть 1) — 2 балла.

Доказана только часть 2) — 4 балла.

За отсутствие рассмотрения случая $r_1 = r_2$ баллы не снимаются.

Если в работе сформулированы и используются известные свойства радикальной оси, оценка не снижается.

Тот факт, что $PC_1 = QC_2$ (или аналогичные равенства отрезков), может быть сформулирован, но не доказан в работе. Поскольку это известная теорема, за отсутствие в работе этого доказательства баллы не снижаются.

Только доказано равенство $PC_1 = QC_2$ (или аналогичные) — 0 баллов (так как это известная теорема).

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось?

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $n = 670$.

Решение. Занумеруем точки и стоящие на них фишки по часовой стрелке последовательными неотрицательными целыми числами от 0 до 2012. Рассмотрим произвольную перестановку и фишки с номерами 0, 671 и 1342, изначально расположенные в вершинах правильного треугольника. Попарные расстояния между ними равны 671. После перестановки сумма попарных расстояний между этими фишками не будет превосходить длины окружности, а значит, расстояние между какими-то двумя не будет превосходить $2013/3 = 671$; значит, расстояние между этими двумя фишками не увеличится. Итак, при $n \geqslant 671$ требуемая перестановка невозможна.

Приведём теперь пример искомой перестановки для $n = 670$. Каждую фишку с номером $i \leqslant 1006$ переставим точку с номером $a_i = 2i$, а каждую фишку с номером $i \geqslant 1007$ — в точку с номером $a_i = 2i - 2013$. Иначе говоря, a_i — это остаток от деления $2i$ на 2013. Нетрудно понять, что в каждую точку попало по фишке. Осталось показать, что расстояния между парами фишек, изначально удалённых друг от друга не более, чем на 670, при этом возрастут.

Рассмотрим произвольные фишки с номерами i и j; пусть расстояние между ними равно $d \leqslant 670$. Тогда одна из дуг между точками a_i и a_j будет иметь длину $2d$, то есть расстояние между этими точками есть $d' = \min\{2d, 2013 - 2d\}$. Но заметим, что $2d > d$ и $2013 - 2d > d$ (последнее — поскольку $3d < 2013$). Значит, и $d' > d$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Только верный ответ без обоснований — 0 баллов.

Доказано, что при $n \geqslant 671$ требуемая расстановка не существует (сделана оценка) — 3 балла.

Приведен пример, показывающий, что $n = 670$ подходит, с обоснованием, что пример удовлетворяет условию — 4 балла.

Приведен верный пример, показывающий, что $n = 670$ подходит, без достаточного обоснования того, что пример удовлетворяет условию — 3 балла.

Баллы за продвижения в доказательстве оценки и в построении примера суммируются.