# 9 класс

## Второй день

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата $6 \times 6$ и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

9.6. Числа $a$ и $b$ таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

9.7. На стороне $AC$ треугольника $ABC$ отметили произвольную точку $D$. Пусть $E$ и $F$ — точки, симметричные точке $D$ относительно биссектрис углов $A$ и $C$ соответственно. Докажите, что середина отрезка $EF$ лежит на прямой $A_0C_0$, где $A_0$ и $C_0$ — точки касания вписанной окружности треугольника $ABC$ со сторонами $BC$ и $AB$ соответственно.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате $2 \times 2$ одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких $n$ за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата $6 \times 6$ и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

9.6. Числа $a$ и $b$ таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

9.7. На стороне $AC$ треугольника $ABC$ отметили произвольную точку $D$. Пусть $E$ и $F$ — точки, симметричные точке $D$ относительно биссектрис углов $A$ и $C$ соответственно. Докажите, что середина отрезка $EF$ лежит на прямой $A_0C_0$, где $A_0$ и $C_0$ — точки касания вписанной окружности треугольника $ABC$ со сторонами $BC$ и $AB$ соответственно.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате $2 \times 2$ одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких $n$ за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?