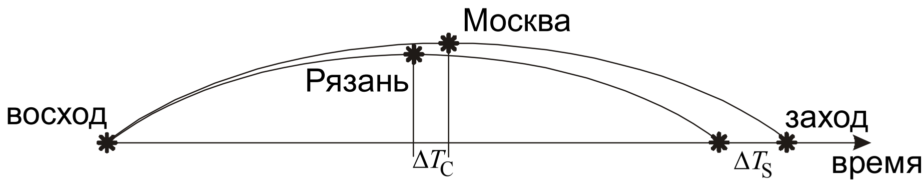
2. Решения заданий Регионального этапа и система оценивания каждого задания.

9 класс

1. Условие. Некоторая далекая звезда одновременно взошла над горизонтом в Москве (широта 55°45′, долгота 37°37′) и в Рязани (широта 54°37′, долгота 39°42′). В каком из этих городов звезда дольше будет находиться над горизонтом и на сколько времени?

1. Решение. Долготы Москвы и Рязани несколько отличаются, и моменты верхней кульминации данной звезды, которая последует через некоторое время после ее восхода, также будут отличаться. Рязань (долгота λ_1) находится восточнее Москвы (долгота λ_2), и там звезда кульминирует раньше. Промежуток времени между кульминациями звезды в Рязани и Москве составит

$$\Delta T_C = T_0\,(\lambda_1 - \lambda_2) / 360° = 8м\ 19с.$$



Здесь T_0 – период вращения Земли (23ч56м04с). Промежуток времени между восходом и верхней кульминацией звезды равен промежутку времени между верхней кульминацией и заходом. Восход звезды произошел в Москве и Рязани одновременно, следовательно, в Рязани заход произойдет раньше, чем в Москве, а разница по времени составит

$$\Delta T_S = 2\ \Delta T_C = 16м\ 38с.$$

1. Рекомендации для жюри. Выше приведен наиболее простой способ решения задачи. При его использовании участником олимпиады вычисление разницы моментов кульминации звезды в Москве и Рязани оценивается в 5 баллов. Если в качестве периода обращения Земли вокруг своей оси будет взято 24 часа, и величина ΔT_C окажется равной 8 минутам 20 секундам, оценка может быть снижена не более чем на 1 балл (4 балла выставляется за данный этап решения). Последующий вывод о соотношении времен захода звезды в двух городах оценивается в 3 балла.

Участники олимпиады могут пойти значительно более сложным путем, вычисляя сначала склонение звезды (оно будет равно примерно +25°), затем часовые углы точек ее восхода и захода в Москве и Рязани. Каждый из этих двух этапов оценивается в 3 балла, формулировка окончательного вывода – еще в 2 балла. Аналогично, если участник олимпиады не учитывает отличие периода осевого вращения Земли от 24 часов, оценка снижается не более чем на 1 балл.

2. Условие. Луна постепенно удаляется от Земли, и через несколько миллиардов лет период смены ее фаз увеличится до 54 современных суток. Каков будет средний угловой диаметр Луны при наблюдении с Земли у горизонта?

2. Решение. Обозначим синодический период Луны в далеком будущем через *S*, и вычислим ее сидерический период *T*:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_E}.$$

Здесь T_E – период обращения Земли вокруг Солнца. Период обращения Луны вокруг Земли составит 47 суток. Сравнивая его с нынешним периодом обращения Луны T_0, получаем величину радиуса орбиты Луны в далеком будущем:

$$R = R_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} = 1.44\, R_0$$

или 552 тысячи километров. Угловой диаметр Луны при наблюдении у горизонта составит

$$\delta = d \,/\, R = \delta_0 \,/\, 1.44$$

или 21.5′. Здесь *d* – диаметр Луны, а δ_0 – ее современный видимый диаметр у горизонта.

2. Рекомендации для жюри. Первый этап решения задания связан с переходом от синодического периода Луны к ее сидерическому периоду. Этот этап оценивается в 3 балла. Если участник олимпиады не выполняет этот этап и приравнивает период обращения Луны вокруг Земли к 54 суткам, данные 3 балла не выставляются, и итоговая оценка может составлять от 0 до 5 баллов в зависимости от выполнения последующих этапов решения. Применение III закона Кеплера и расчет нового радиуса орбиты Луны оценивается в 3 балла.

При этом участникам не обязательно получать численное значение радиуса орбиты, они могут лишь вычислить его отношение к современному радиусу орбиты и перейти к изменению видимых размеров Луны. Последний этап решения и формулировка ответа оцениваются в 2 балла.

3. Условие. На каких широтах на Земле высота незаходящего Солнца в течение суток может изменяться ровно в два раза? Рефракцией и видимыми размерами Солнца пренебречь.

3. Решение. По условию задачи, Солнце является незаходящим светилом, а его высота в верхней кульминации вдвое больше, чем высота в нижней кульминации (обе величины – положительные). Очевидно, картина может наблюдаться в приполярных широтах. Запишем выражения для высоты светила в верхней и нижней кульминации, справедливые для обоих полушарий Земли:

$$h_В = 90° - |\,\delta - \varphi\,|,$$
$$h_Н = -90° + |\,\delta + \varphi\,|.$$

Здесь δ – склонение светила, φ – широта места наблюдения. По условию задачи

$$90° - |\,\delta - \varphi\,| = 2\cdot(-90° + |\,\delta + \varphi\,|) = -180° + 2\,|\,\delta + \varphi\,|.$$

Отсюда мы получаем:

$$2\,|\,\delta + \varphi\,| + |\,\delta - \varphi\,| = 270°.$$

Для решения этого уравнения необходимо рассмотреть несколько случаев, учитывая, что дело заведомо происходит вблизи полюсов Земли. Если предположить, что широта φ положительна, то при любых возможных склонениях Солнца (не превышающих по модулю величину ε, равную 23.4°) величина (δ + φ) положительна, а величина (δ – φ) отрицательна. Тогда мы имеем

$$3\varphi + \delta = 270°,$$
$$\varphi = 90° - \delta/3.$$

Учитывая, что широта не может превышать 90°, а модуль склонения – величину ε, получаем, что картина, описанная в условии задачи, может наблюдаться на широтах от (90° – ε/3) до 90°, т.е. от 82.2° до 90°.

Аналогичным образом, предполагая, что широта места наблюдения отрицательна, и раскрывая знак модуля в уравнениях, получаем диапазон широт в южном полушарии: от –90° до
–82.2°.

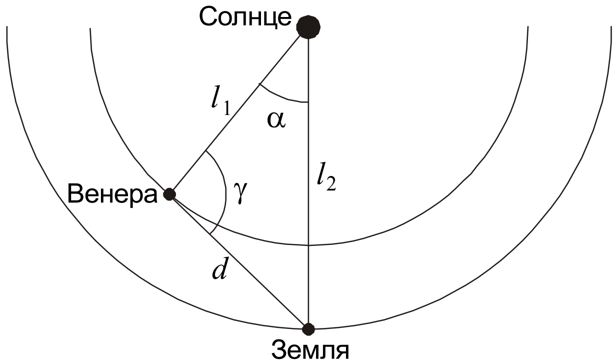
3. Рекомендации для жюри. При решении задания участники олимпиады могут пользоваться как универсальными формулами для высот светила в верхней и нижней кульминации, так и более привычными, записанными для северных умеренных и полярных широт. Во втором случае они должны указать, что ситуация, описанная в условии задачи, симметрична относительно смена знака широты, и существует аналогичное решение в южном полушарии. Указание наличия двух решений оценивается в 2 балла.

Правильные выражения для высот в верхней и нижней кульминации (в любом из двух видов) оцениваются в 2 балла, запись основного уравнения, отражающего условие задания – еще в 1 балл, его решение с учетом всех возможных случаев – еще в 2 балла, формулировка окончательного ответа – в 1 балл.

4. Условие. В 2012 году произойдут несколько интересных событий, связанных с Венерой. В частности, 3 апреля планета пройдет по звездному скоплению Плеяды, а 6 июня – по диску Солнца. Нарисуйте (в одном масштабе), как будет выглядеть Венера в телескоп (с прямым изображением) во время этих событий при наблюдении из средних широт северного полушария. Каковы будут видимый диаметр и фаза Венеры в эти дни? Орбиты Венеры и Земли считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

4. Решение. Прохождение Венеры по диску Солнца может происходить только в нижнем соединении Венеры. Прохождение Венеры по звездному скоплению Плеяды наступит 3 апреля, за 64 дня до прохождения по диску Солнца. Эта величина составляет 64/584 часть синодического периода Венеры. Учитывая, что орбиты Венеры и Земли близки к круговым, получаем разность гелиоцентрических долгот Земли и Венеры 3 апреля:

$$\alpha = 360° \cdot (64/584) = 39.5°.$$



На рисунке видно, что Венера в день прохождения по Плеядам будет вблизи своей наибольшей восточной элонгации. Расстояние между Венерой и Землей может быть вычислено по теореме косинусов

$$d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\alpha$$

и составляет 0.64 а.е. Похожее значение (0.69 а.е.) мы бы получили из теоремы Пифагора, предположив, что Венера находится в точности в наибольшей восточной элонгации. Здесь l_1 и l_2 – расстояния Венеры и Земли от Солнца. Угловой диаметр Венеры составляет

$$\delta = D / d = 26''.$$

Здесь D – диаметр Венеры. Приближенное значение для случая наибольшей восточной элонгации равно 24″. Угол γ с вершиной в центре Венеры, образованный направлениями на Солнце и Землю, также вычисляется из теоремы косинусов:

$$\cos\gamma = (l_1^2 + d^2 - l_2^2) / 2l_1 d.$$

Подставляя численные значения, мы получаем 94.4°. Если бы Венера находилась в точке наибольшей восточной элонгации, этот угол был бы равен 90°. Величина фазы Венеры составляет

$$F = (1 + \cos\gamma) / 2 = 0.46.$$

В момент наибольшей восточной элонгации фаза равна 0.5. Венера выглядит как половина диска (точнее, чуть уже), выпуклостью вправо.

В день прохождения по диску Солнца фаза Венеры равна нулю, а угловой диаметр составляет

$$\delta = D\,/\,(l_2 - l_1) = 60''.$$

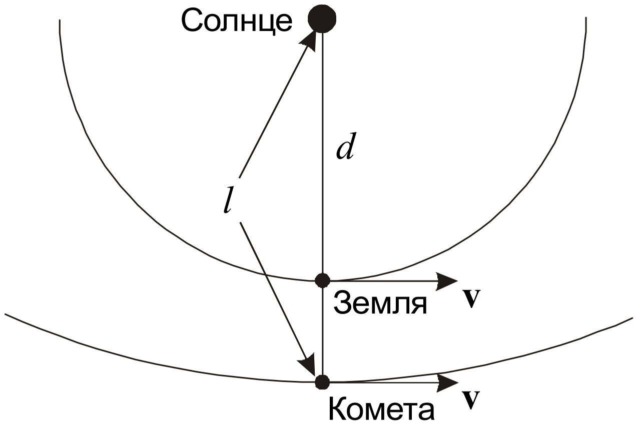
Венера в дни прохождения по Плеядам и по диску Солнца в едином масштабе будет выглядеть следующим образом:

4. Рекомендации для жюри. Решение задачи можно вести как точным образом, так и в приближении, что Венера 3 апреля находится в наибольшей восточной элонгации. Полное правильное точное решение оценивается 8 баллами, правильно выполненное приближенное решение – 6 баллами.

При выполнении точного решения вычисление расстояния между Венерой и Землей 3 апреля оценивается в 3 балла, вычисление углового диаметра Венеры в этот день – 1 баллом, ее фазы – еще 2 баллами. При использовании приближения наибольшей восточной элонгации Венеры данные три этапа оцениваются соответственно 2, 1 и 1 баллом. Для обоих методов решения 1 балл выставляются за правильное вычисление видимого диаметра Венеры 6 июня и еще 1 балл – за правильное выполнение рисунка.

5. Условие. Пролетая точку перигелия орбиты, комета оказывается в противостоянии с Солнцем и одновременно «останавливается» в своем видимом движении среди звезд. Каков эксцентриситет ее орбиты, если в это время она находится на том же расстоянии от Солнца, что и Марс? Орбиты Земли и Марса считать круговыми, комета движется в плоскости эклиптики.

5. Решение. В момент, описанный в условии задачи, комета проходит точку перигелия своей орбиты, то есть, движется в пространстве перпендикулярно направлению на Солнце и Землю (учтем, что комета располагается в плоскости эклиптики и для наблюдателей на Земле проходит точку противостояния с Солнцем).



Земля находится на одной линии с Солнцем и кометой и также движется перпендикулярно этой линии. По условию задачи, на небе Земли комета в этот момент не движется относительно звезд. Следовательно, скорости движения Земли и кометы, направленные вдоль параллельных линий, совпадают по величине:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{d}}.$$

Здесь M – масса Солнца, d – расстояние от Солнца до Земли. Комета находится в перигелии на расстоянии l от Солнца. Для ее скорости справедливо выражение

$$v = \sqrt{\frac{GM}{l}(1+e)}.$$

Отсюда мы получаем:

$$e = (l/d) - 1 = 0.52.$$

5. Рекомендации для жюри. Первая часть решения задачи состоит в обосновании того, что Земля и комета в указанный момент движутся в параллельном направлении с одинаковыми скоростями. Эта часть решения при условии полной обоснованности вывода оценивается в 4 балла. Правильная запись выражения для круговой скорости Земли оценивается в 1 балл, для скорости кометы в перигелии – в 2 балла (она может приводиться как с выводом, так и без него). Формулировка окончательного ответа оценивается еще в 1 балл.

6. Условие. Представьте себе, что радиус звездного диска нашей Галактики изображен размером в радиус Земли. Какого размера станут звезды в этом масштабе?

6. Решение. Радиус звездного диска Галактики составляет около 15 кпк, в то время как радиус Земли около 6400 км. Вспомним, что 1 парсек включает в себя примерно 200 000 а.е. или $3 \cdot 10^{13}$ км. Самые большие звезды имеют размер около 1000 радиусов Солнца, в то время как маленькие звезды – белые карлики, величиной с Землю, т.е. около 0.01 радиуса Солнца. Посчитаем, какого они станут размера. Солнце будет иметь радиус

$$\frac{6.4 \cdot 10^3}{1.5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{13}} 7 \cdot 10^5 \text{ км} \approx 10^{-8} \text{ км} = 10 \text{ мкм}.$$

Тогда самые большие звезды будут иметь радиус 10 мм, а самые маленькие – всего 0.1 мкм.

6. Рекомендации для жюри. Первая часть решения состоит в вычислении масштаба изображения или, то же самое, соотношения величин радиусов Галактики и Земли. Правильное вычисление масштаба оценивается в 4 балла. Оставшиеся 4 балла выставляются за вычисление размеров звезд в данном масштабе. Если участник олимпиады в качестве звезды берет только Солнце, то за эту часть задания ему выставляется 2 балла (сумма – 6 баллов). При вычислении размеров малых и больших звезд участник олимпиады может взять несколько иные размеры (например, размеры нейтронных звезд или бурых карликов в качестве малых звезд), что не может быть основанием для снижения оценки.