10 класс

10.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что такое число n существует.

Заметим, что максимальный возможный остаток от деления на натуральное число m равен $m-1$. Поэтому сумма остатков от деления произвольного числа на числа $a_1, \ldots, a_{10}$ не больше, чем $678 - 10 = 668$, а сумма остатков от деления его на числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ не больше, чем $2 \cdot 678 - 10 = 1346$. Итак, если бы все остатки были максимальными возможными, то их сумма равнялась бы $668 + 1346 = 2014$. Поскольку эта сумма для нашего числа n равна 2012, возможны только два случая:

Случай 1, когда ровно один из остатков на 2 меньше максимального возможного, а остальные — максимальные возможные, и

Случай 2, когда ровно два остатка на 1 меньше максимальных возможных.

В *случае 1* мы получаем, что при некотором k один из остатков от деления n на числа a_k и $2a_k$ — максимальный возможный, а другой — на 2 меньше максимального возможного. Тогда одно из чисел $n+1$ и $n+3$ делится на a_k, а другое — на $2a_k$, то есть оба делятся на a_k. Это невозможно, так как число $(n+3)-(n+1)=2$ не может делиться на $a_k > 2$.

Случай 2 также невозможен. Действительно, среди остатков от деления n на четные числа $2a_1, 2a_2, \ldots 2a_{10}$ по крайней мере восемь — максимальные возможные, то есть нечётные. Значит, n — нечётное число, и потому все остатки от деления его на числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ нечётны. Таким образом, они — максимальные возможные. Это значит, что $n+1$ делится на все числа

$2a_1, \ldots, 2a_{10}$ и, следовательно, на все числа $a_1, \ldots, a_{10}$, то есть все 20 остатков — максимальные возможные. Противоречие.

Замечание. Можно показать, что ответ остаётся отрицательным, если предположить только, что все числа a_i больше 1.

10.2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть для определенности $AB < AC$. Пусть луч DI пересекает отрезки AO и AC в точках P и Q соответственно. Имеем $\angle AIP = \angle DQC - \angle IAC = 90^\circ - \angle C - \angle A/2$ и $\angle IAP = \angle OAB - \angle IAB = (180^\circ - \angle AOB)/2 - \angle A/2 = 90^\circ - \angle C - \angle A/2$. Таким образом, треугольник API равнобедренный ($AP = PI$), то есть точка P лежит на серединном перпендикуляре ℓ к AI, и лучи PA и PI симметричны относительно ℓ. Описанная окружность треугольника AID также симметрична относительно ℓ. Получаем, что отрезки AE и ID тоже симметричны, поэтому они равны.

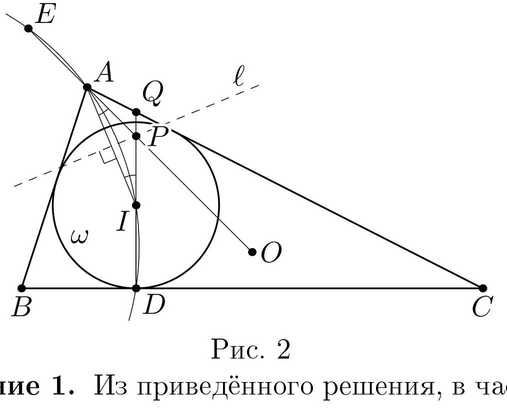

Рис. 2

Замечание 1. Из приведённого решения, в частности, следует, что точка E всегда лежит на продолжении отрезка OA за точку A.

Замечание 2. Из доказанного следует, что степень точки O относительно окружности a, описанной около треугольника AID, равна $R(R+r)$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Ясно, что степени точки O относительно окружностей b и c, построенных аналогично a, будут такими же. Из этого следует, что IO является общей радикальной осью трёх окружностей a, b и c, и эти окружности имеют две общие точки: одна — это точка I, а другая лежит на прямой IO. Используя формулу Эйлера для расстояния между I и O, нетрудно найти положение второй точки пересечения указанных окружностей.

10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$. (*И. Богданов*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < \ldots < a_5$. По условию, $a_{i+1} - a_i \geqslant 1$ при всех $i = 1, 2, 3, 4$. Значит, $a_j - a_i \geqslant j - i$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 5$. Возведём каждое из полученных неравенств в квадрат и сложим их все. Получим

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} (a_j - a_i)^2 \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} (j-i)^2 = 4\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 4^2 = 50,$$

то есть

$$4\sum_{i=1}^{5} a_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} a_i a_j \geqslant 50. \tag{1}$$

С другой стороны, по условию имеем

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} a_i a_j = (a_1 + \ldots + a_5)^2 = 4k^2. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$5\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 10k^2 \geqslant 50 + 4k^2,$$

откуда $6k^2 \geqslant 50$, или $k^2 \geqslant 25/3$.

Замечание. Условию задачи удовлетворяют, например, числа $a_i = (3-i) + 2/\sqrt{3}$, $k = 5/\sqrt{3}$. Таким образом, число $25/3$ в условии нельзя заменить на большее.

10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов 1, x, x^2, …, x^n. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2$, $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$, …, $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Докажите, что $m \geqslant 2n/(k + 1)$.

(*А. Шаповалов*)

Решение. Рассмотрим конечную ситуацию на доске. Если многочлен P появился как сумма многочленов Q и R, то проведём стрелки из P в Q и R. Далее, если из многочлена F ведёт (ориентированный!) путь в G, будем говорить, что G *участвует* в F (в частности, сам F участвует в F). Нетрудно видеть в этом случае, что все коэффициенты многочлена $F - G$ неотрицательны.

Можно считать, что каждый многочлен на доске — сумма различных степеней x; действительно, если какой-то коэффициент многочлена не меньше 2, то и у всех, в которых он участвует, соответствующий коэффициент также будет не меньше 2. Значит, он не участвует в суммах вида S_i.

Мы собираемся оценить общее количество многочленов на доске. Каждый из многочленов $S_1, \ldots, S_n$ назовём *финальным.* Каждый из многочленов, участвующих в S_n (то есть в сумме всех исходных одночленов), назовём *существенным.* Ясно, что есть n финальных многочленов.

Покажем индукцией по p, что в многочлене с p ненулевыми коэффициентами участвуют ровно $2p - 1$ многочленов (из которых p одночленов); отсюда будет следовать, что количество существенных многочленов равно $2n+1$. База при $p = 1$ очевидна. Пусть теперь многочлен P был получен на некотором шаге как сумма Q и R, и количества ненулевых коэффициентов в P, Q и R равны p, q и r соответственно; тогда $p = q+r$. По предположению индукции, в Q и R участвуют $2q - 1$ и $2p - 1$ многочленов, среди которых нет совпадающих (поскольку в Q и R нет общих одночленов). Тогда в P, с учётом самого P, участвуют $(2q - 1) + (2r - 1) + 1 = 2p - 1$ многочленов.

Покажем, наконец, что в каждую минуту на доске появлялось не более одного финального существенного многочлена. Действительно, пусть в некоторую минуту появились одновременно существенные многочлены S_p и S_q $(p < q)$. Рассмотрим первый момент, когда на доске появился многочлен P, в котором одновременно участвуют и S_p, и S_q; тогда он появился как сумма двух многочленов, каждый из которых содержит одночлен x^p. Но тогда коэффициент при x^p в P не меньше 2, что невозможно.

Итак, на доске есть n финальных и $2n + 1$ существенных многочленов, при этом не больше m из них являются и теми, и другими. Значит, общее количество многочленов на доске не меньше, чем $n + (2n + 1) - m$. С другой стороны, исходно на доске было $n+1$ многочленов, а добавилось не больше, чем mk. Значит, $(n+1)+mk \geqslant n+(2n+1)-m$, или $m(k+1) \geqslant 2n$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если зафиксировать натуральное k, то при всех достаточно больших n оценка в задаче точна.