

## **Второй тур. Задачи.**

### *Решения*

Дата написания **23 апреля 2012 г.**  
Количество заданий **5**  
Сумма баллов **100**  
Время написания **180 минут**

**Задача № 6 (20 баллов)**  
**Монополист и обменный курс**

Фирма Ф, расположенная на территории страны Р, является монопольным производителем товара Т в этой стране. Национальная валюта страны Р называется рубль. Для производства продукции фирма Ф нуждается в сырье, которое она закупает за границей. Для производства одного килограмма товара Т необходимо закупить сырья на сумму 5 долларов. Остальные издержки представляют собой расходы на оплату отечественных факторов производства; эти расходы описываются уравнением  $C = 5q^2$ , где  $q$  — количество продаваемого товара (в кг), а  $C$  — расходы (в рублях). Обратная функция спроса на товар Т на внутреннем рынке страны Р имеет вид  $p = 90 - 5q$ . Иностранцы потребители готовы купить любое количество продукции фирмы по цене, не превышающей 10 долларов за кг.

а) Обозначим за  $e$  обменный курс рубля (количество рублей за один доллар). Для каждого положительного значения обменного курса  $e$  определите оптимальный выпуск товара Т фирмой Ф. На графике в координатах  $(e; q)$  изобразите зависимость оптимального выпуска фирмы от обменного курса рубля.

б) Предложите содержательное экономическое объяснение вида этой зависимости.

Решение:

(а) В задаче фигурируют две валюты: рубли и доллары. Для того чтобы не запутаться, удобно все переменные, выраженные в денежных единицах (прибыль, издержки, цены) номинировать в одной и той же валюте. В этом решении все денежные переменные выражены в рублях.

Издержки фирмы Ф (в рублях):  $TC = 5L + 5eq = 5q^2 + 5eq$ .

Следовательно, предельные издержки равны:  $MC = 10q + 5e$

Предельный доход на внутреннем рынке описывается уравнением:  $MR = 90 - 10q$ .

На внешнем рынке цена фиксирована:  $P = 10e$ . Поэтому предельный доход от продажи каждой дополнительной единицы товара на внешнем рынке тоже равен  $10e$ .

Будем пока считать, что валютный курс меньше 9, и, следовательно, предельный доход на внешнем рынке меньше 90. В этом случае при небольших объемах продаж предельный доход на внутреннем рынке больше, чем на внешнем рынке. Поэтому сначала фирме следует продавать товар на внутреннем рынке. А затем, когда предельные доходы внешнего и внутреннего рынка сравняются, следует продавать товар на внешнем рынке. Таким образом, суммарный предельный доход от продажи товара на всех рынках будет иметь вид:

$$MR = \begin{cases} 90 - 10q, & q < 9 - e \\ 10e & q \geq 9 - e \end{cases}$$

Предельный доход не возрастает, а предельные издержки строго возрастают, значит в точке, в которой  $MR(q) = MC(q)$  предельный доход равен предельным издержкам, прибыль максимальна.

Отсюда находим:

$$q^* = \begin{cases} 4,5 - 0,25e, & e < 6 \\ 0,5e, & e \geq 6 \end{cases} .$$

Заметим, что, если курс больше девяти, то это соотношение также верно, так как в этом случае фирме выгодно всю продукцию продавать только на внешнем рынке и, следовательно, предельный доход фирмы имеет вид  $10e$ , а оптимальный выпуск равен  $0,5e$ .

**(б)** Содержательно полученный результат можно интерпретировать следующим образом.

Ослабление национальной валюты вызывает два эффекта, влияющих на оптимальный выпуск фирмы:

Негативный — рост издержек фирмы (в рублевом выражении) из-за удорожания импортного сырья.

Позитивный — рост предельной выручки (в рублевом выражении) от продажи товара иностранцам.

Сначала, по мере ослабления валютного курса выпуск падает из-за того, что преобладает негативный эффект (на первом участке позитивный эффект отсутствует вообще, так как продажа осуществляется только на внутренний рынок). Однако затем преобладающим становится позитивный эффект и выпуск начинает расти.

**Задача № 7 (20 баллов)**  
**Как поддерживать отечественный автопром?**

Функции спроса и предложения на рынке автомобилей в стране **И** имеют вид  $Q_d^E = 100 - P$ ,  $Q_s^E = P$ . В стране **Э** соответствующие функции описываются уравнениями  $Q_d^Y = 75 - P$ ,  $Q_s^Y = 2P$ .

а) Найдите мировую цену на автомобили в отсутствие ограничений на торговлю.

б) Стремясь защитить внутренних производителей, правительство страны **И** ввело потоварный тариф на ввоз автомобилей из страны **Э**. Найдите размер тарифа и сумму полученных страной **И** поступлений от него, если известно, что после реализации этой меры импорт автомобилей в страну уменьшился на 40 %.

в) На одном из заседаний правительства страны **И** обсуждалась мера поддержки внутренних производителей, альтернативная импортному тарифу, — введение потоварной субсидии для них. При какой ставке субсидии эта мера имела бы тот же эффект с точки зрения изменения прибыли отечественных производителей, что и тариф из пункта б)? Каковы были бы расходы государства на выплату субсидии?

г) Некий гражданин страны **И** прокомментировал ситуацию следующим образом: «То, что был введен тариф, а не субсидия, абсолютно правильно. Обе меры защищают производителей в одинаковой степени, однако в случае тарифа государство получает дополнительные поступления (оплачиваемые за счет иностранцев!), в то время как в случае субсидии оно, наоборот, вынуждено тратить бюджетные средства. Следовательно, введенный тариф предпочтительнее с точки зрения общества нашей страны». Есть ли в этих рассуждениях ошибка?

Решение:

(а) В отсутствие вмешательства равновесная цена равна 35, а объем импорта в страну **И** равен  $Q_d(35) - Q_s(35) = 30$ . После введения тарифа объем импорта составил  $0,6 \cdot 30 = 18$ .

Заметим, что после введения тарифа цены в странах будут разными, причем отличаться они будут ровно на величину тарифа (в стране **И** цена будет выше). Поэтому для ответа на вопрос достаточно найти  $P_I$  и  $P_E$ ; ответом будет их разность.

После введения тарифа объем спроса в стране **И** превысил объем внутреннего предложения на 18 единиц:  $(100 - P_I) - P_I = 18$ , откуда  $P_I = 41$ .

С другой стороны, в стране **В** объем предложения должен превысить объем спроса на 18 единиц:  $2P_E - (75 - P_E) = 18$ , откуда  $P_E = 31$ .

В равновесии ставка тарифа в точности равна разнице цен между странами, и значит  $t = 41 - 31 = 10$ . Государство получит  $10 \cdot 18 = 180$  ден. ед.

(б) Заметим, что в силу конкурентного поведения фирм, их выпуск является однозначной функцией от цены производителя. Значит, и прибыль их является однозначной функцией от цены производителя. Следовательно, субсидия будет иметь тот же эффект, если цена, фактически получаемая в новом равновесии производителями в стране **А**, будет совпадать с ценой из (а) (то есть будет равна 41).

По цене 41 производители в **А** произведут те же 41 единицу, однако теперь цена для всех агентов, кроме этих производителей, будет единой. Найдем ее из условия на равновесие:

$$(100 - P) + (75 - P) = 41 + (2P),$$

откуда  $P = 33,5$ . Значит, ставка субсидии должна быть равна  $41 - 33,5 = 7,5$ .

Государство потратит  $7,5 \cdot 41 = 307,5$  ден. ед. на выплату субсидии.

(в) Ошибка заключается в том, что в данном рассуждении не учтены потребители. Действительно, в случае тарифа цена для потребителей в стране **И** будет высокой (41), в то время как в случае субсидии она будет гораздо ниже (33,5). Таким образом, благосостояние потребителей выше в случае введения субсидии, чем в случае введения тарифа, и потому вывод о том, что тариф однозначно лучше с точки зрения общества, сделан безосновательно.

Примечание: используя как меру благосостояния суммарный излишек агентов, можно доказать, что при совершенной конкуренции субсидия как мера поддержки производителей всегда (для любых функций спроса и предложения!) лучше с точки зрения общества, чем тариф (настолько большим оказывается проигрыш потребителей от тарифа).

**Задача № 8(20 баллов)**

**Лужин и Свидригайлов**

В начале 2012 года Петр Лужин устроился экономическим советником президента, а Аркадий Свидригайлов — начальником отдела макроэкономической статистики. Дела в экономике шли неважно. Согласно отчету Свидригайлова, произошел экономический спад — в 2011 году реальный ВВП сократился на 5 % по сравнению с 2010-м! Остальные данные отчета за последние четыре года приведены в таблице (в экономике есть два товара — Икс и Игрек, а буквой  $n$  обозначен темп прироста номинального ВВП в процентах к предыдущему году).

Год	$P_x$	$Q_x$	$P_y$	$Q_y$	$n$
2008		36		32	—
2009	30	30	22	50	25%
2010	36	30	22		20%
2011	33	40	24	45	

а) Заполните пустые клетки в таблице на бланке ответов, если известно, что в своих расчетах Свидригайлов за базовый год принимал 2008-й. Приведите полностью все необходимые вычисления.

б) Президент будет очень раздосадован, если увидит эти цифры, потому что журналисты поднимут истерику про депрессию, и ему вряд ли удастся переизбраться на следующий срок. Однако Лужин нашел выход из положения. Не подделывая данные о ценах и количествах и абсолютно правильно произведя все расчеты, он смог избежать негативной реакции избирателей на данные об изменении реального ВВП за 2011 год (негативная реакция наступает всякий раз, когда темп прироста оказывается отрицательным). Как ему это удалось?

Решение:

Год	$P_x$	$Q_x$	$P_y$	$Q_y$	$n$
2008	<b>24</b>	36	<b>23</b>	32	—
2009	30	30	22	50	25%
2010	36	30	22	<b>60</b>	20%
2011	33	40	24	45	<b>0%</b>

(а) Номинальный ВВП в 2009 году равен  $30 \cdot 30 + 22 \cdot 50 = 2000$ . В 2010 году он вырос на 20%, и значит, номинальный ВВП в 2010 году равен  $1,2 \cdot 2000 = 2400$ .

Отсюда находим  $Q_y^{2010}$ :  $36 \cdot 30 + 22 \cdot Q_y^{2010} = 2400$ , откуда  $Q_y^{2010} = 60$ .

Заметим, что в 2011 году номинальный ВВП тоже равен 2400 ( $2400 = 33 \cdot 40 + 24 \cdot 45$ ).

Значит, темп прироста номинального ВВП в 2011 году равен 0%.

Нам осталось разобраться с ценами в 2008 году. Обозначим их  $P_x$  и  $P_y$ .

С одной стороны, номинальный ВВП в 2009 году вырос на 25%, откуда

$$\frac{2000}{36P_x + 32P_y} = 1,25, \quad 9P_x + 8P_y = 400.$$

С другой стороны, темп прироста реального ВВП (то есть ВВП в ценах 2008 года) в 2011 году составил (-5%), и значит

$$\frac{40P_x + 45P_y}{30P_x + 60P_y} = 0,95, \quad \text{что то же самое, что } 11,5P_x = 12P_y.$$

Решая получившуюся систему, получаем  $P_x = 24$ ,  $P_y = 23$ .

(б) Темп роста реального ВВП – это темп роста стоимости корзины произведенных товаров в ценах определенного (базисного) года, и потому этот темп роста существенно зависит от того, какой год принять за базисный.

Лужин воспользовался именно этим – он посчитал изменение реального ВВП, взяв в качестве базисного другой год, а именно 2010-й, и темп роста оказался положительным!

Действительно, посчитаем темп прироста реального ВВП в 2011 году, взяв за базисный 2010:

$$r = \frac{36 \cdot 40 + 22 \cdot 45}{36 \cdot 30 + 22 \cdot 60} - 1 = \frac{1440 + 990}{2400} - 1 = \frac{1}{80} = 1,25\% > 0.$$

Можно проверить, что если взять за базисный 2009, или сам 2011, то темп прироста все равно окажется отрицательным, так что Лужину ничего не оставалось, как взять именно 2010-ый.

Как Лужин до этого додумался?

Как видим, производство одного товара в 2011 году выросло, а другого – упало. Чтобы итоговый темп роста ВВП был побольше, нужно постараться максимальный вес приписать тому товару, производство которого выросло – в нашем случае, товару Икс. Поэтому нужно подобрать такой базисный год, в котором цена Икса относительно цены Игрека максимальна – а это как раз 2010-ый год.

### Задача № 9 (20 баллов)

#### Бинты

В аптеке продаются два вида бинтов — эластичный и неэластичный. Функции спроса на оба вида бинтов имеют линейный вид, однако при любой цене спрос на эластичный бинт эластичнее спроса на неэластичный бинт. Более того, известно, что в каждой точке ценового интервала (10;15) одна функция спроса является эластичной, а другая — неэластичной (при других значениях цены такого не происходит). Аптека является монопольным продавцом бинтов в своем районе, и закупает их для перепродажи по фиксированным ценам, а других переменных затрат не несет.

а) Известно, что в оптимуме аптека установила на бинты одинаковые цены, причем коэффициент эластичности спроса на эластичный бинт оказался в точке оптимума в 3,5 раза большим по модулю, чем коэффициент эластичности спроса на неэластичный бинт. *Определите монопольную цену бинтов, а также цены их закупки.*

б) Предположим, что поставщик бинтов предложил аптеке закупать у него бинты по единой цене, равной среднему арифметическому из первоначальных. *Согласится ли аптека на такое предложение, если первоначально продажа каждого вида бинтов приносила ей половину выручки?* Считаем, что аптека согласится, если ее максимальная прибыль в новом случае не меньше, чем ее прибыль в пункте а).

в) Поставщик бинтов, делая свое предложение, не знал об особенностях функций спроса на бинты, описанных в условии (он не знал даже об их линейности, не говоря уж об особенностях их эластичности). Он знал лишь то, сколько единиц каждого бинта покупала у него аптека, и по какой цене. *Мог ли он, зная только это, определить, согласится аптека на его предложение или нет?*

Решение:

(а). Восстановим функции спроса. Очевидно, что 10 и 15 — это «критические» точки функций спроса, соответствующие единичной эластичности. Для линейного спроса максимальная цена спроса ровно вдвое больше, чем цена в точке единичной эластичности, и значит, эти максимальные цены спроса равны 20 и 30. При этом нетрудно доказать, что более эластичный спрос имеет более низкую максимальную цену спроса (это понятно и интуитивно), и значит, 20 — максимальная цена спроса на эластичный бинт, 30 — максимальная цена спроса на неэластичный бинт.

Таким образом,  $Q_э = b(20 - P_э)$  и  $Q_н = d(30 - P_н)$ . (Переменные с индексом «э» относятся к эластичному бинту, а переменные с индексом «н» — к неэластичному;  $d$  и  $b$  — некие положительные параметры).

Нам известно, что в оптимуме  $P_э^* = P_н^* = P^*$ , а также что  $E_э = \frac{-P^*}{20 - P^*} = 3,5E_н = \frac{-3,5P^*}{30 - P^*}$

Из последнего уравнения находим, что  $P^* = 16$ .

Пусть закупочные цены на бинты равны  $C_э$  и  $C_н$ .

Тогда прибыль фирмы, как функция от цен на бинты, равна

$$\pi(P_э, P_н) = b(20 - P_э)(P_э - C_э) + d(30 - P_н)(P_н - C_н) - FC \rightarrow \max$$

Как видим, эта функция разбивается на два слагаемых, график каждого из которых является параболой с ветвями вниз. Оптимальные для фирмы цены находятся в вершинах этих парабол, то есть ровно посередине между корнями каждой из них:

$$P_э^* = \frac{20 + C_э}{2} \text{ и } P_н^* = \frac{30 + C_н}{2}. \text{ (Тот же результат можно было получить, приравнявая на каждом из}$$

рынков предельный доход к предельным издержкам).

С другой стороны, как мы выяснили,  $P_э^* = P_н^* = 16$ , откуда находим  $C_н = 2$ ,  $C_э = 12$ .

Итак, ответ на вопросы пункта (а) таков:  $P^* = 16$ ,  $C_н = 2$ ,  $C_э = 12$ .

(б) Данный пункт можно решить и без расчетов (см. решение п. (в)), однако для полноты картины приведем их.

Мы знаем, что  $P_э^* = P_н^*$ , и что  $TR_э^* = TR_н^*$ . Отсюда  $Q_э^* = Q_н^*$ .

Значит,  $(20 - 16)b = (30 - 16)d \Rightarrow b = 3,5d$ .

Первоначальная прибыль фирмы равна

$$\pi_0^* = b \cdot 4 \cdot 4 + d \cdot 14 \cdot 14 - FC = 252d - FC.$$

Если аптека согласится, то новая (единая) цена бинтов составит 7.

Изначально неочевидно, станет аптеке лучше или хуже, ведь один бинт для нее подешевел, а другой подорожал.

В этих условиях аптеке будет выгодно назначить другие розничные цены на бинты:

$$P_3^* = \frac{20+7}{2} = 13,5 \text{ и } P_n^* = \frac{30+7}{2} = 18,5.$$

Новая прибыль фирмы составит

$$\pi_1^* = b \cdot 6,5^2 + d \cdot 11,5^2 - FC = \frac{7 \cdot 169 + 2 \cdot 529}{8} d - FC.$$

Чтобы сравнить эту прибыль с первоначальной, необязательно рассчитывать значение этого выражения, достаточно лишь, например, заметить, что

$$\pi_1^* = \frac{7 \cdot 169 + 2 \cdot 529}{8} d - FC > \frac{7 \cdot 150 + 2 \cdot 500}{8} d - FC = \frac{2050}{8} d - FC > \frac{2016}{8} d - FC = 252d - FC = \pi_0^*$$

Значит, новая прибыль строго больше, чем старая, ему выгодно согласиться.

**(в)** Удивительно, но поставщику информации было достаточно — он совершенно определенно мог сказать, что фирма согласится на его предложение, даже не зная функции спроса и не производя расчетов.

Докажем, что если изначально объемы закупок бинтов равны (как в нашем случае), то фирме выгодно соглашаться на предложение поставщика, независимо от того, каковы функции спроса на бинты.

Заметим, что если в новых условиях фирма выберет «старые» объемы  $Q_3 = Q_n = q$  (устанавливая «старые» цены), то величина ее переменных издержек останется прежней:

раньше она была равна  $C_n q + C_3 q = C_n + C_3 q$ ;

теперь она равна  $\frac{C_n + C_3}{2} (q + q) = C_n + C_3 q$ .

Значит, и объем прибыли останется прежним (ведь функции конечного спроса на бинты не изменились). Итак, в новых условиях у фирмы всегда есть вариант действия (выбрать  $Q_3 = Q_n = q$ ), который принесет ей не меньшую прибыль, чем была у нее в старых условиях. А это значит, что и максимальная прибыль, которую фирма может получить в новых условиях, не меньше, чем старая (на самом деле она даже больше, потому что старые объемы в новых условиях не оптимальны — ей выгодно сократить закупки подорожавшего бинта и увеличить закупки подешевевшего).

Все эти рассуждения мог проделать поставщик, и потому он знал, что аптека согласится.

Соответственно, пункт (2) можно было решить и без расчетов — просто проделав приведенное выше рассуждение.

### Задача № 10 (20 баллов)

#### Рейтинги неравенства

В некотором королевстве есть 2012 регионов. В каждом регионе население состоит из двух групп с ненулевой численностью, внутри которых доходы распределены равномерно. Король поручил трем ведущим экономическим университетам составить рейтинги регионов по степени неравенства доходов (то есть расположить регионы по возрастанию уровня неравенства доходов в них). Единой меры неравенства не существует, и университеты используют в своей работе разные показатели:

- Университет В. использует для измерения неравенства коэффициент Джини;
- Университет Р. использует для измерения неравенства отношение среднедушевого дохода в более богатой группе населения к среднедушевому доходу в более бедной группе населения;
- Университет М. измеряет неравенство с помощью отношения доходов 20 % богатейших жителей области к доходам 20 % беднейших.

По данным каждого из университетов, во всех 2012 регионах уровень неравенства доходов разный.

- а) Верно ли, что рейтинги, составленные университетами В. и Р., будут одинаковыми?  
б) Верно ли, что рейтинги, составленные университетами В. и М., будут одинаковыми?  
в) Верно ли, что рейтинги, составленные университетами Р. и М., будут одинаковыми?  
г) Верно ли, что, какие два региона ни возьми, хотя бы два университета из трех всегда придут к одному мнению относительно того, в каком из них неравенство доходов выше?

Решение:

Пусть  $x$  — доля более бедной группы в населении, а  $y$  — ее доля в доходе. Тогда коэффициент Джини равен  $x - y$ , а отношение среднедушевого дохода в группе богатых к среднедушевому доходу

в группе бедных равно  $\frac{(1-y)x}{(1-x)y}$ .

(а) Нет. (б) Нет. Контрпример один и тот же. Пусть в первом регионе бедная группа составляет 20% населения и обладает 10% дохода, а во втором регионе бедная группа составляет 25% населения и обладает 14% дохода. Тогда коэффициенты Джини равны  $0,2 - 0,1 = 0,1$  и  $0,25 - 0,14 = 0,11$  соответственно. Поскольку в обоих этих регионах бедная группа составляет не меньше 20%, но и не больше 80% населения, 20% беднейших в каждом из этих регионов будут целиком принадлежать бедной группе, а 20% богатейших — целиком принадлежать богатой группе, из чего следует, что значения мер, используемых университетами Р. и М., совпадут. Они будут равны  $\frac{(1-0,9)0,2}{(1-0,2)0,9} = \frac{9}{4}$ .

для первого региона и  $\frac{(1-0,14)0,25}{(1-0,25)0,14} = \frac{43}{21}$  для второго. Как видим, университет В. придет к выводу,

что в первом регионе неравенство меньше  $0,1 < 0,11$ , а другие университеты — что оно меньше

во втором регионе  $\left(\frac{43}{21} < \frac{9}{4}\right)$ . Значит, в рейтинге В. первый регион будет выше, чем второй, а в рейтингах Р. и М. — наоборот, второй выше, чем первый, и рейтинги не совпадут.

(в) Нет. Ясно, что пример надо искать среди случаев, когда в одной из групп меньше 20% населения, иначе, как было замечено выше, эти две меры просто совпадают.

Контрпример. Пусть в первом регионе бедная группа составляет 90% населения и обладает 45% дохода, а во втором бедные составляют 80% населения и обладают  $1/3$  дохода. Тогда отношение среднедушевых доходов в первом регионе равно 11, а во втором — 8. С другой стороны, отношение доходов 20% богатейших к 20% беднейших во втором регионе также равно 8, а в первом — 6. (В первом регионе, в отличие от второго, в 20% богатейших вошли как члены более бедной, так и члены более богатой группы населения). Таким образом, рейтинги, составленные университетами, будут отличаться: в рейтинге Р. выше будет второй регион, а рейтинге М. — первый.

(г) Да. Поскольку все университеты считают, что во всех областях степень неравенства разная, есть всего два разных мнения — «в первой области неравенство больше» и «во второй области неравенство больше». Эти два мнения надо приписать трем университетам. Значит, хотя бы два университета из

трех будут придерживаться одного мнения. Это рассуждение является не чем иным, как применением известного из математики принципа Дирихле.

Возникает интересная ситуация: как мы показали, *любые два* их трех университетов могут разойтись во мнениях по каким-то двум областям, но при этом *хотя бы два* из них во мнениях обязательно сойдутся.