Министерство образования и науки Российской Федерации
Академия повышения квалификации и профессиональной
переподготовки работников образования

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

г. Орел, 2012 г.

XIX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап, Орел, 2012 г. Условия и решения задач. Под редакцией А.С. Расторгуева, О.С. Угольникова, А.М. Татарникова, Е.Н. Фадеева. 48 стр.

Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.

10 класс

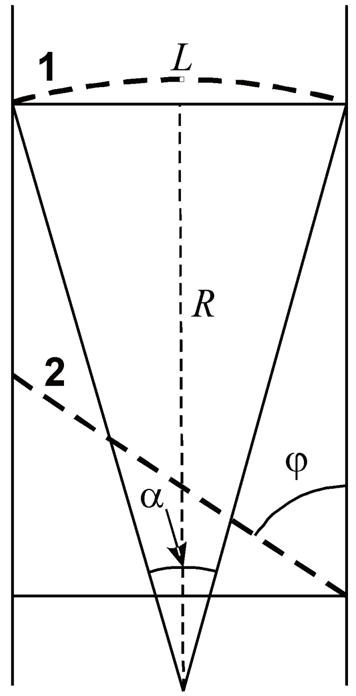
X. 1 СКВОЗЬ КУПОЛ

А.М. Татарников

? Астроном наблюдает на обсерватории в городе Орел из центра купола с маленьким телескопом (диаметр объектива много меньше размеров щели купола). Оцените, какое максимальное время он может наблюдать околоэкваториальные объекты, не вращая купол? В какой стороне горизонта это достижимо? Диаметр купола 10 м, ширина щели купола 1 м, широта Орла равна +53°.

! Определим угловую ширину купола при наблюдении из его центра:

$$\alpha = 2\,arcsin\frac{L}{2R} \approx \frac{L}{R} = 0.2$$



или 11.4°. Здесь R – радиус купола, L – ширина его щели. Если астроном наблюдает светило на небесном экваторе вблизи его верхней кульминации, то длина видимого участка суточного пути светила (линия 1 на рисунке) будет примерно равна углу α. Но этот участок может быть длиннее, если светило движется не перпендикулярно створкам купола. Максимальный угол наклона для небесного экватора будет на восходе или заходе светила. Поэтому продолжительность наблюдений с неподвижным куполом будет максимальна, если светило наблюдается сразу после восхода или перед заходом (линия 2 на рисунке) на востоке или западе соответственно. Длина видимого пути составит:

$$\beta = \frac{\alpha}{\sin\varphi} = \frac{L}{R\sin\varphi} = 0.25$$

или 14.3°. Время, за которая звезда пройдет этот путь, составляет:

$$T = \frac{\beta \cdot S}{2\pi} = \frac{LS}{2\pi R\sin\varphi} = 57\ \text{мин.}$$

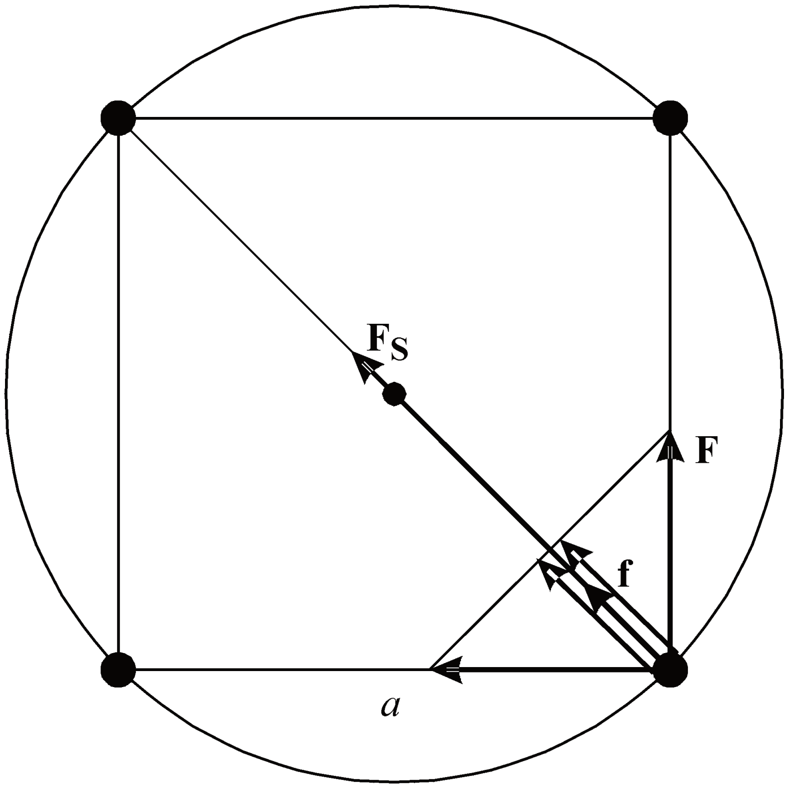
Здесь S – продолжительность звездных суток.

X. 2 ЗВЕЗДНЫЙ КВАДРАТ

А.Н. Акиньщиков

? Звездная система состоит из 4 звезд одинаковой массы M, расположенных в вершинах квадрата со стороной a и движущихся по общей окружности относительно общего центра масс. Найдите скорости звезд относительно центра масс и период обращения этой системы.

! Изобразим конфигурацию из четырех звезд в вершинах квадрата со стороной a.



На каждую из звезд действуют взаимно-перпендикулярные и равные по модулю силы притяжения от двух соседних звезд:

$$F = \frac{GM^2}{a^2}.$$

На звезду действует также сила притяжения со стороны противоположной звезды. Расстояние до нее равно $a\sqrt{2}$, а сила равна:

$$f = \frac{GM^2}{2a^2}.$$

Равнодействующая всех трех сил будет направлена к центру масс и составит:

$$F_S = \frac{2F}{\sqrt{2}} + f = \frac{GM^2}{a^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right).$$

По условию задачи, звезды движутся по окружности. Центр этой окружности находится в центре квадрата, а радиус равен $a/\sqrt{2}$. Из соотношения углового ускорения и радиуса траектории получаем значение скорости:

$$v = \sqrt{\frac{F_S}{M} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}.$$

Период обращения составляет:

$$T = \frac{2\pi\left(a/\sqrt{2}\right)}{v} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}} = \frac{2\pi a^{3/2} \cdot \sqrt{4-\sqrt{2}}}{\sqrt{7GM}}.$$

Х. 3 РАСТУЩИЙ ДЕНЬ

О.С. Угольников

? В некотором пункте Земли долгота светового дня увеличилась на 7 минут 52 секунды по сравнению с предыдущими сутками. Найти широту этого пункта. Рефракцией, уравнением времени и угловыми размерами Солнца пренебречь.

! Если пренебречь уравнением времени, то момент верхней кульминации Солнца каждый день приходится на один и тот же момент по местному времени – 12ч00м. Если в результате суточного изменения склонения Солнца $\Delta\delta$ долгота светового дня увеличилась за сутки на величину ΔT, это означает, что местное время восхода Солнца уменьшилось на $\Delta T/2$, а местное время захода Солнца – увеличилось на ту же величину. Величина $\Delta T/2$ составляет 3 минуты 56 секунд, а интервал времени между двумя последующими восходами Солнца – 23 часа 56 минут 04 секунды, то есть ровно звездные сутки.

По условию задачи, мы пренебрегаем рефракцией и угловыми размерами Солнца. В этом случае в момент восхода центр Солнца располагается на горизонте. В момент обоих восходов звездное время одинаково, расположение всех звезд, а также эклиптики относительно горизонта совпадает. Два последовательных положения Солнца, расположенных в разных и не противоположных точках эклиптики, оказываются на горизонте. Следовательно, в эти моменты эклиптика совпадает с горизонтом, а один из двух полюсов эклиптики – с зенитом. Это может быть только на северном или южном полярном круге, с широтой $\pm 66.6^{\circ}$, равной склонению того или иного полюса эклиптики.

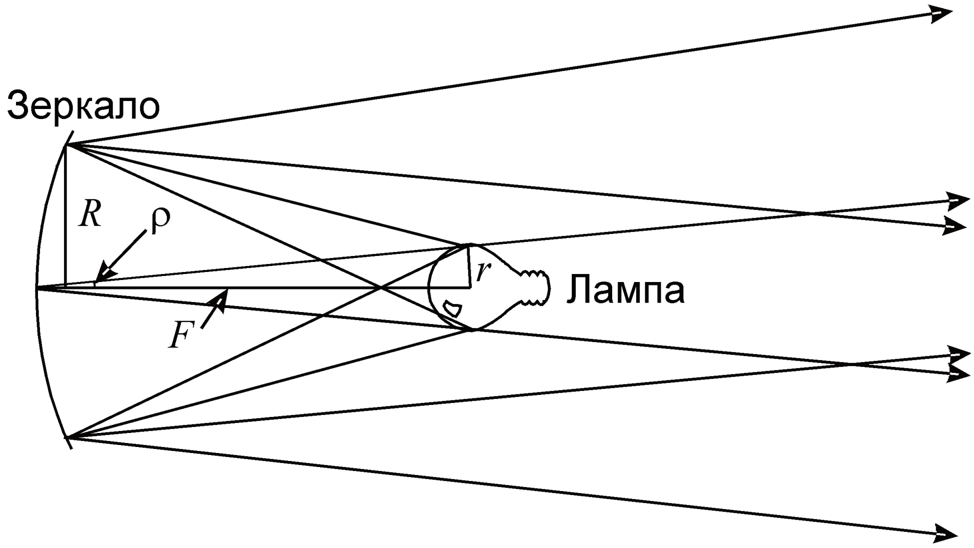
Х. 4 ФАРА ДАЛЬНЕГО СВЕТА

О.С. Угольников

? Фара дальнего света представляет собой матовую лампу мощностью 40 Вт и диаметром 2 см, установленную в фокусе отражателя диаметром 20 см. С какого максимального расстояния свет одной фары можно увидеть невооруженным глазом? Аберрации оптики, рассеяние света в воздухе и помехи для распространения света (в том числе горизонт) не учитывать. Считать, что спектральный состав света лампы аналогичен солнечному.

! Изобразим оптическую схему фары. Обозначим мощность лампы через J_0, радиус ее матовой колбы – через r. Световая энергия, попадающая от лампы на отражатель в единицу времени, с достаточной для оценки точностью составляет

$$J = J_0 \frac{\pi R^2}{4\pi F^2} = J_0 \frac{R^2}{4F^2}.$$



Здесь F – расстояние от лампы до отражателя, оно же – фокусное расстояние отражателя. Лампа располагается в фокусе отражателя, и каждая часть лампы создает на выходе параллельный пучок света. За счет того, что лампа имеет конечные размеры, весь выходящий поток света будет иметь вид расходящегося конуса, стороны которого будут образовывать угол с осью, равный угловому радиусу лампы, видимой от отражателя:

$$\rho = r\,/\,F.$$

На расстоянии D от фары (существенно большем размеров самой фары) радиус светового пятна составит

$$L = D\,\rho = D\,r\,/\,F.$$

Поток энергии на единицу площади будет равен

$$j = \frac{J}{\pi L^2} = J_0\,\frac{R^2}{4\pi D^2 r^2}.$$

Обратим внимание, что эта величина не зависит от фокусного расстояния. Для того, чтобы фара была заметна невооруженным глазом, поток энергии j должен соответствовать звезде 6^m (или быть большим). Определим это значение, сравнив фару с Солнцем (спектральный состав излучения по условию задачи одинаков). Поток энергии от Солнца на Земле равен

$$j_S = \frac{J_S}{4\pi L_E^2} = 1.37\cdot 10^3\ \text{Вт}\,/\,\text{м}^2.$$

Здесь J_S – светимость Солнца, L_E – расстояние от Солнца до Земли. С учетом блеска Солнца (-26.8^m) по формуле Погсона получаем значение минимального потока энергии, заметного глазом:

$$j = j_S\cdot 10^{0.4\cdot(-26.8-6)} = 10^{-10}\ \text{Вт}\,/\,\text{м}^2.$$

Максимальное расстояние, с которого можно будет увидеть фару, составит

$$D = \frac{R}{r}\sqrt{\frac{J_0}{4\pi j}} = 1800 \text{ км.}$$

Столь большое значение не должно вводить в заблуждение – на Земле включенные фары автомобилей легко видны с больших расстояний, ограниченных, прежде всего, потерями света в фаре и условиями видимости (горизонт, земные объекты и т.д.) и поглощением света в атмосферном воздухе.

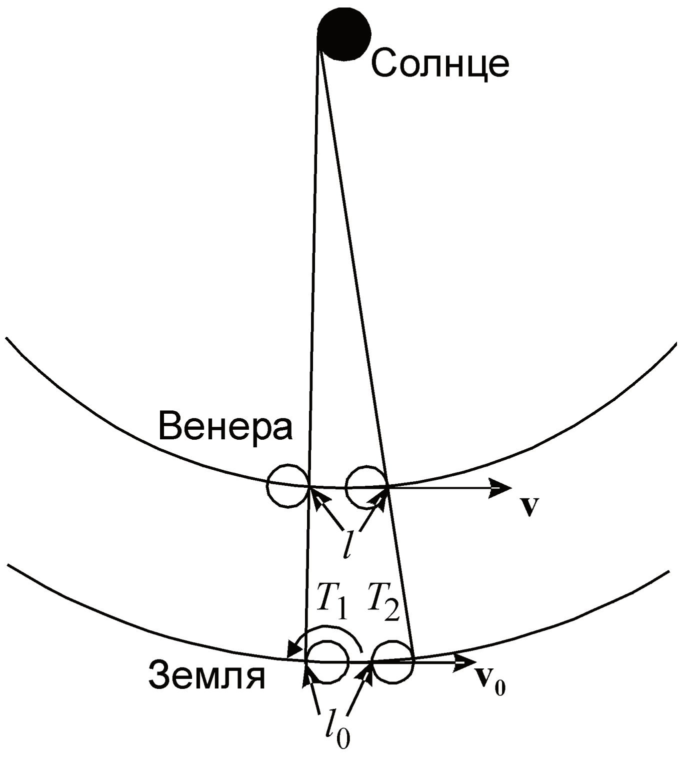
X. 5 ПРОХОЖДЕНИЕ ВЕНЕРЫ - XVIII ВЕК

О.С. Угольников

? Шел XVIII век. Две экспедиции направились к противоположным точкам экватора, чтобы зафиксировать момент вступления Венеры на диск Солнца на его восходе и заходе соответственно и определить из этого величину астрономической единицы. Радиус орбиты Венеры в астрономических единицах (0.723 а.е.) был к тому времени хорошо известен. И если хронометр, взятый с собой первой экспедицией, работал точно, то у второй экспедиции (наблюдавшей вход Венеры на заходе Солнца) он спешил на одну минуту. Какое значение астрономической единицы будет получено в результате работы экспедиций? Наклон орбиты Венеры и экватора Земли к эклиптике не учитывать, орбиты обеих планет считать круговыми.

! При наблюдении из разных точек Земли Венера вступает на диск Солнца в разное время, и этот эффект может служить основой для определения параллакса Солнца или расстояния от Солнца до Земли. Предположим для простоты, что Венера и Земля обращаются вокруг Солнца в одной плоскости, содержащей также экватор Земли. Рассмотрим картину со стороны северного полюса эклиптики.

Пусть в некоторый момент T_1 прохождение Венеры по диску Солнца стало видно из одной точки Земли. Венера движется по орбите быстрее Земли, и прохождение будет в начале видно из восточной точки Земли, задней по отношению к ее орбитальному движению. При наблюдении из этой точки Солнце и Венера будут заходить за горизонт. В эту точку прибыла вторая экспедиция, описанная в условии задачи. Через некоторое



время, в момент T_2, прохождение станет видимым со всей дневной части поверхности Земли. Последними вступление Венеры на диск Солнца увидят наблюдатели с передней, западной окраины Земли, где Солнце и Венера будут восходить над горизонтом.

Пусть a_0 – искомое расстояние между Солнцем и Землей, а q – радиус орбиты Венеры в астрономических единицах. Расстояние между Солнцем и Венерой составляет qa_0. Из III закона Кеплера можно получить соотношение орбитальных скоростей Венеры (v) и Земли (v_0):

$$v^2 q = v_0^2.$$

Обозначим перемещение Земли за интервал времени ($T_2 - T_1$) как l_0. Как видно из рисунка, Венера за это время переместится на расстояние

$$l = (l_0 + 2R)\, q.$$

Здесь R – радиус Земли. Учитывая соотношение скоростей, получаем:

$$\frac{l_0}{v_0} = \frac{l}{v} = \frac{q^{3/2}(l_0 + 2R)}{v_0}.$$

Отсюда

$$l_0 = \frac{2Rq^{3/2}}{(1 - q^{3/2})}.$$

Зная моменты времени T_1 и T_2, можно определить величину орбитальной скорости Земли и далее – радиуса ее орбиты:

$$v_0 = \frac{l_0}{T_2 - T_1};$$

$$a_0 = \frac{v_0 T_E}{2\pi} = \frac{l_0 T_E}{2\pi(T_2 - T_1)} = \frac{Rq^{3/2} T_E}{\pi(1 - q^{3/2})(T_2 - T_1)}.$$

Здесь T_E – период обращения Земли вокруг Солнца. Из последней формулы можно вычислить, что истинный промежуток времени ($T_2 - T_1$) составляет 11.4 минуты. Однако, из-за ошибки хода часов экспедиции, работавшей на заходе Солнца, вместо момента времени T_1 был зафиксирован момент $T_1 + \Delta T_1$. В результате, ошибочное значение величины астрономической единицы получится равным:

$$a' = \frac{Rq^{3/2} T_E}{\pi(1 - q^{3/2})(T_2 - T_1 - \Delta T_1)} = a_0 \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_1 - \Delta T_1} = 164 \text{ млн км.}$$

X. 6 ШАРОВОЕ СКОПЛЕНИЕ

О.С. Угольников

? Шаровое звездное скопление имеет угловой диаметр 30′ и блеск 6^m. Измерение лучевых скоростей звезд скопления показали, что они варьируют в пределах ±10 км/с относительно лучевой скорости центра скопления. Оцените расстояние до скопления, считая, что оно состоит только из звезд, подобных Солнцу. Межзвездным поглощением пренебречь.

! Шаровое звездное скопление – гравитационно-связанная система. Характерные лучевые скорости звезд скопления относительно его центра близки к значению первой космической скорости на краю скопления:

$$v = \sqrt{\frac{GM \cdot N}{R}}.$$

Здесь M – характерная масса звезды в скоплении (масса Солнца), N – количество звезд в скоплении, R – радиус скопления. Далее, все скопление имеет блеск 6^m. Найдем расстояние, с которого такой блеск имело бы одно Солнце с абсолютной величиной 4.7^m:

$$\lg D_0 = \frac{6-4.7}{5} + 1 = 1.26.$$

Это расстояние составляет примерно 18 пк или $5.4 \cdot 10^{17}$ м. Для скопления, состоящего из N таких же звезд, блеск 6^m соответствует расстоянию:

$$D = D_0 \sqrt{N}.$$

Наконец, видимый радиус скопления ρ составляет 15′ или 0.0044 радиан. Для него справедливо соотношение:

$$\rho = \frac{R}{D}.$$

Мы получили систему из трех уравнений относительно неизвестных величин N, R и D. Выразим первые две величины через третью:

$$R = D\rho; \quad N = \frac{v^2 R}{GM} = \frac{v^2 D \rho}{GM}.$$

Подставляя это в выражение для расстояния D, получаем:

$$D^2 = D_0^2 N = \frac{v^2 D_0^2 D \rho}{GM}; \quad D = \frac{v^2 D_0^2 \rho}{GM}.$$

Расстояние составляет 10^{21} м или 30 кпк.